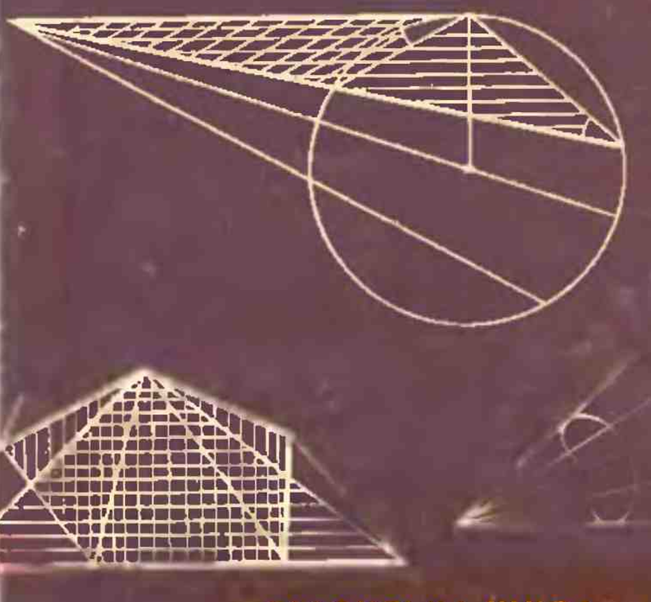
ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК И СБОРНИК
ЗАДАЧ ДЛЯ 8 и 9 КЛАССОВ



РАДЯНСЬКА ШКОЛА
1966

ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК И СБОРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ 8 И 9 КЛАССОВ

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«РАДЯНСЬКА ШКОЛА»
КИЕВ — 1966

513 — (075)
К 44

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Эта книга состоит из последних трёх глав учебника А. П. Киселёва, Геометрия, ч. I и соответствующего сборника задач — § 8—16 книги Н. Рыбкина, Сборник задач по геометрни, ч. I.

Главы и параграфы в этом учебнике ианово занумерованы; старые номера взяты в скобки.

ХАРЬКОВСКАЯ КНИЖНАЯ ФАБРИКА им. ФРУНЗЕ

А. П. КИСЕЛЁВ

ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК ДЛЯ 8 и 9 КЛАССОВ

Под редакцией и с дополнениями
проф. Н. А. Глаголева

ГЛАВА I(III).

ПОДОБНЫЕ ФИГУРЫ.

I. ПОНЯТИЕ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ВЕЛИЧИН.

1(144). Задача измерения отрезка. До сих пор, сравнивая между собой два отрезка, мы могли определить, равны ли они между собой, и если не равны, то какой из них больше. Нам приходилось это делать при изучении соотношений между сторонами и углами треугольника, при сравнении отрезка прямой с ломаной и в некоторых других случаях. Но такое сравнение отрезков между собой ещё не даёт точного представления о величине каждого из них.

Мы поставим теперь задачу установить точное понятие о длине отрезка и найти способы выражать эту длину при помощи числа.

2(145). Общая мера. Общей мерой двух отрезков прямой называется такой третий отрезок, который в каждом из первых двух содержится целое число раз без остатка. Так, если отрезок AM (черт. 1) содержится 5 раз в AB и 3 раза в CD, то AM есть общая мера AB и CD. Подобно этому можно говорить об общей мере двух дуг одинакового радиуса, двух углов и вообще двух однородных величин.

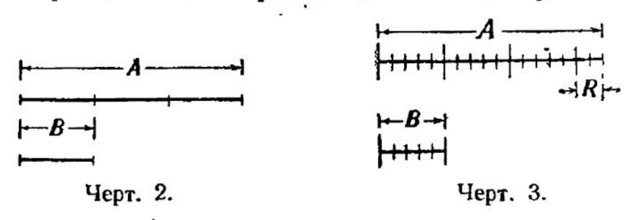
Черт. 1.

Замечание. Очевидно, что если отрезок AM есть общая мера отрезков AB и CD, то, разделив AM на 2, 3, 4 и так далее равные части, мы получим меньшие общие меры для отрезков AB и CD. Таким образом, если два отрезка имеют какую-нибудь общую меру, то можно сказать, что они имеют бесчисленное множество общих мер. Одна из них будет наибольшая.

3(146). Теоремы, на которых основано нахождение наибольшей общей меры. Чтобы найти наибольшую общую меру двух отрезков, употребляют способ последовательного отложения, подобный тому последовательному делению, каким в арифметике находят наибольший общий делитель двух целых чисел. Этот способ основывается на следующих теоремах.

1. ***Если меньший из двух отрезков*** (A и B, черт. 2) ***содержится в большем целое число раз без остатка, то наибольшая общая мера этих отрезков есть меньший из них.***

Пусть, например, отрезок B содержится в отрезке A ровно 3 раза; так как при этом, конечно, отрезок B со-



Черт. 2. Черт. 3.

держится в самом себе ровно 1 раз, то B есть общая мера отрезков A и B; с другой стороны, эта мера есть и наибольшая, так как никакой отрезок, больший B, не может содержаться в B целое число раз.

2. ***Если меньший из двух отрезков*** (B, черт. 3) ***содержится в большем*** (A) ***целое число раз с некоторым остатком*** (R), ***то наибольшая общая мера этих отрезков*** (если она существует) ***должна быть и наибольшей общей мерой меньшего отрезка*** (B) ***и остатка*** (R). Пусть, например,

$$A = B + B + B + R.$$

Из этого равенства мы можем вывести следующие два заключения:

1) Если существует отрезок, содержащийся без остатка в B и R, то он содержится также без остатка и в A; если, например, какой-нибудь отрезок содержится в B ровно 5 раз и в R содержится ровно 2 раза, то в A он содержится $5+5+5+2$, т. е. 17 раз без остатка.

2) Обратно: если существует отрезок, содержащийся без остатка в A и B, то он содержится также без остатка и в R; если, например, какой-нибудь отрезок содержится

в A ровно 17 раз и в B ровно 5 раз, то в той части отрезка A, которая равна $3B$, он содержится 15 раз; следовательно, в остающейся части отрезка A, т. е. в R, он содержится $17 - 15$, т. е. 2 раза.

Таким образом, у двух пар отрезков

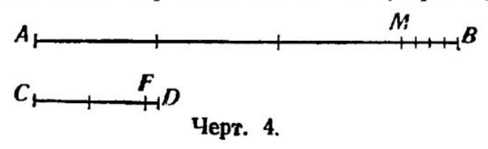
$$\widehat{A \text{ и } B} \quad \widehat{B \text{ и } R}$$

должны быть одни и те же общие меры (если они существуют); поэтому и наибольшая общая мера у них должна быть одна и та же.

К этим двум теоремам надо ещё добавить следующую аксиому измерения (аксиому Архимеда):

Как бы велик ни был больший отрезок (A) и как бы мал ни был меньший отрезок (B), всегда, откладывая меньший отрезок на большем последовательно 1, 2, 3 и так далее раз, мы получим, что после некоторого m-го отложения или не получится никакого остатка, или получится остаток, меньший меньшего отрезка (B); другими словами, всегда можно найти столь большое целое положительное число m, что $B \cdot m < A$, но $B \cdot (m + 1) > A$.

4(147). Нахождение наибольшей общей меры двух отрезков. Пусть требуется найти наибольшую общую меру двух данных отрезков AB и CD (черт. 4).



Черт. 4.

Для этого на большем отрезке откладываем (с помощью циркуля) меньший отрезок столько раз, сколько это возможно. При этом, согласно аксиоме измерения, случится одно из двух: или 1) CD уложится в AB без остатка, тогда искомая мера, согласно теореме 1-ой, будет CD, или 2) получится некоторый остаток MB, меньший CD (как у нас на чертеже); тогда, согласно теореме 2-ой, вопрос приведётся к нахождению наибольшей общей меры двух меньших отрезков, именно CD и первого остатка MB. Чтобы найти её, поступаем по предыдущему, т. е. откладываем MB на CD столько раз, сколько можно. И опять произойдёт одно из двух: или 1) MB уложится в CD без остатка, тогда искомая мера будет MB, или 2) получится остаток

FD, меньший MB (как у нас на чертеже); тогда вопрос приведётся к нахождению наибольшей общей меры двух меньших отрезков, именно MB и второго остатка FD.

Продолжая этот приём далее, мы можем встретиться с такими двумя возможными случаями:

1) после некоторого отложения не получится никакого остатка или

2) процесс последовательного отложения не будет иметь конца (в предположении, что мы имеем возможность откладывать как угодно малые отрезки, что, конечно, возможно только теоретически).

В первом случае последний остаток и будет наибольшей общей мерой данных отрезков. Чтобы удобней вычислить, сколько раз эта наибольшая общая мера содержится в данных отрезках, выписываем ряд равенств, получаемых после каждого отложения. Так, по нашему чертежу мы будем иметь:

после первого отложения . . . . $AB = 3CD + MB$;
» второго » . . . . $CD = 2MB + FD$;
» третьего » . . . . $MB = 4FD$.

Переходя в этих равенствах от нижнего к верхнему, последовательно находим:

$$MB = 4FD;\ CD = (4FD) \cdot 2 + FD = 9FD;$$
$$AB = (9FD) \cdot 3 + 4FD = 31FD.$$

Подобно этому можно находить наибольшую общую меру двух дуг одинакового радиуса, двух углов и т. п.

Во втором случае данные отрезки не могут иметь общей меры. Чтобы обнаружить это, предположим, что данные отрезки AB и CD имеют какую-нибудь общую меру. Мера эта, как мы видели, должна содержаться целое число раз не только в AB и в CD, но и в остатке MB, следовательно, и во втором остатке FD, и в третьем, и в четвёртом и т. д. Так как остатки эти идут, последовательно уменьшаясь, то в каждом из них общая мера должна содержаться меньшее число раз, чем в предыдущем остатке. Если, например, в MB общая мера содержится 100 раз (вообще m раз), то в FD она содержится менее 100 раз (значит, не более 99 раз); в следующем остатке она должна содержаться менее 99 раз (значит, не более 98 раз) и т. д. Так как ряд целых положительных уменьшающихся чисел: 100, 99, 98,... (и вообще m, $m-1$, $m-2$,...) имеет

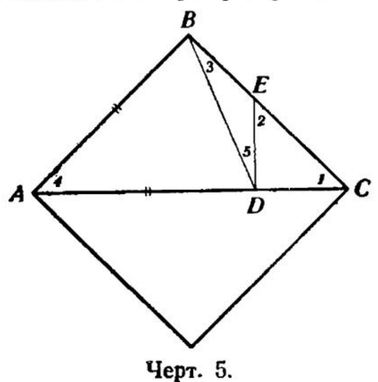
конец (как бы велико ни было число m), то и процесс последовательного отложения, при достаточном его продолжении, должен дойти до конца, т. е. мы дойдем до того, что уже не получится никакого остатка. Значит, если последовательное отложение не имеет конца, то данные отрезки никакой общей меры иметь не могут.

5(148). Соизмеримые и несоизмеримые отрезки. Два отрезка прямой называются **соизмеримыми**, если они имеют общую меру, и **несоизмеримыми**, когда такой общей меры не существует.

На практике нет возможности убедиться в существовании несоизмеримых отрезков, потому что, продолжая последовательное отложение, мы всегда дойдем до столь малого остатка, который в предыдущем остатке по-видимому укладывается целое число раз. Быть может при этом и должен был бы получиться некоторый остаток, но по причине неточности инструментов (циркуля) и несовершенства наших органов чувств (зрения) мы не в состоянии его заметить. Однако, как мы сейчас докажем, несоизмеримые отрезки существуют.

6(149). Теорема. ***Диагональ квадрата несоизмерима с его стороной.***

Так как диагональ делит квадрат на два равнобедренных прямоугольных треугольника, то теорему эту можно высказать иными словами так: ***гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника несоизмерима с его катетом.***



Черт. 5.

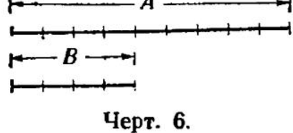
Предварительно докажем следующее свойство такого треугольника: если на гипотенузе (черт. 5) отложим отрезок AD, равный катету, и проведём $DE \perp AC$, то образовавшийся при этом *прямоугольный треугольник DEC будет равнобедренный, а отрезок BE катета BC окажется равным отрезку DC гипотенузы*. Чтобы убедиться в этом, проведём прямую BD и рассмотрим углы треугольников DEC и BED. Так как треугольник ABC равнобедренный

и прямоугольный, то $\angle 1 = \angle 4$ и, следовательно, $\angle 1 = 45°$, а потому в прямоугольном треугольнике DEC и $\angle 2 = 45°$ и, значит, треугольник DEC имеет два равных угла и потому его стороны DC и DE равны.

В треугольнике BDE угол 3 равен прямому углу B без угла ABD, а угол 5 равен прямому углу ADE без угла ADB. Но $\angle ADB = \angle ABD$ (так как $AB = AD$); значит, и $\angle 3 = \angle 5$. Но тогда треугольник DBE должен быть равнобедренный, и потому $BE = ED = DC$.

Заметив это, станем находить общую меру отрезков AB и AC. Так как $AC > AB$ и $AC < AB + BC$, т. е. $AC < 2AB$, то катет AB отложится на гипотенузе AC только один раз с некоторым остатком DC. Теперь надо этот остаток откладывать на AB, или, что всё равно, на BC. Но отрезок BE, по доказанному, равен DC. Значит, надо DC отложить ещё на EC. Но EC есть гипотенуза равнобедренного треугольника DEC. Следовательно, процесс отложения для нахождения общей меры сводится теперь к откладыванию катета DC прямоугольного равнобедренного треугольника DEC на его гипотенузе EC. В свою очередь это отложеиие сведётся к откладыванию катета на гипотенузе нового, меньшего прямоугольного равнобедренного треугольника и т. д., очевидно, без конца. А если процесс этот не может окончиться, то общей меры отрезков AC и AB не существует.

7(150). Понятие об измерении отрезков. Чтобы составить ясное представление о величине данного отрезка, его сравнивают с другим, уже известным нам отрезком, например с метром (этот известный отрезок, с которым сравнивают другие отрезки, называется **единицей длины**). При этом могут представиться два различных случая: или измеряемый отрезок соизмерим с единицей, илн несоизмерим с ней.



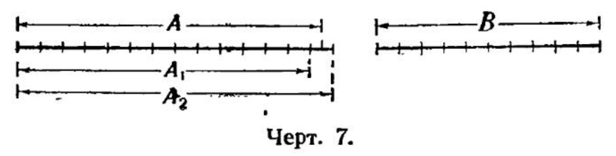
Черт. 6.

1) *Измерить отрезок, соизмеримый с единицей, значит узнать, сколько раз в нём содержится единица или какая-нибудь доля единицы.*

Пусть, например, надо измерить какой-нибудь отрезок A (черт. 6) при помощи единицы B, соизмеримой с A. Тогда находят их общую меру и узнают, сколько раз она содержится в B и A. Если общей мерой окажется сам отрезок B, то результат измерения выразится ц е л ы м чис-

лом. Так, когда B содержится в A три раза, говорят, что длина отрезка A равна 3 единицам. Если же общей мерой будет некоторая доля B, то результат измерения выразится дробным числом. Так, если общая мера есть $\frac{1}{4}$ доля B и она содержится в A девять раз (как изображено на черт. 6), то говорят, что длина отрезка A равна $\frac{9}{4}$.

Число, получившееся после измерения, называется часто **мерой** той величины, которая измерялась. Числа целые и дробные называются **рациональными числами.**



Черт. 7.

2) Когда данный отрезок A несоизмерим с единицей B, тогда измерение выполняется косвенно: вместо отрезка A измеряют два других отрезка, соизмеримых с единицей, из которых один меньше, а другой больше A и которые разнятся от A как угодно мало. Чтобы найти такие соизмеримые отрезки, поступают так: положим, что мы желаем найти соизмеримые отрезки, которые отличались бы от A меньше, чем на $\frac{1}{10}$ единицы длины B. Тогда делим единицу B на 10 равных частей (черт. 7) и одну такую долю укладываем на отрезке A столько раз, сколько возможно. Пусть она уложится 13 раз с некоторым остатком, меньшим $\frac{1}{10}B$. Тогда мы будем иметь отрезок A_1, соизмеримый с единицей и меньший, чем A. Отложив $\frac{1}{10}B$ ещё один раз, получим другой отрезок, A_2, тоже соизмеримый с единицей, но больший, чем A, и который разнится от A менее, чем на $\frac{1}{10}$ единицы. Длины отрезков A_1 и A_2 выражаются числами $\frac{13}{10}$ и $\frac{14}{10}$. Эти числа рассматриваются как приближённые меры длины отрезка A: первое с недостатком, второе с избытком. При этом, так как отрезок A разнится от A_1 и от A_2 менее, чем на $\frac{1}{10}$ единицы, то принято говорить, что каждое из этих чисел выражает длину отрезка A с точностью до $\frac{1}{10}$.

Вообще, чтобы найти приближённые меры длины отрезка A с точностью до $\frac{1}{n}$ единицы, делят единицу B на n равных частей и узнают, сколько раз $\frac{1}{n}$-я доля единицы содержится в A; если она содержится в A m раз с некоторым остатком, меньшим $\frac{1}{n}B$, то числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ считаются приближёнными мерами длины отрезка A с точностью до $\frac{1}{n}$-й, первое с недостатком, второе с избытком.

Заметим, что этим путём мы можем находить приближённые результаты измерения и тогда, когда измеряемый отрезок A соизмерим с единицей B; только в этом случае мы, если пожелаем, можем найти также и точный результат, тогда как в случае несоизмеримости точного результата при помощи одних рациональных чисел мы получить не можем.

Для получения того числа, которое можно было бы принять за точную меру длины отрезка A, когда этот отрезок несоизмерим с единицей измерения, поступают следующим образом.

Вычисляют последовательно приближённую меру длины отрезка A с недостатком с точностью до 0,1, затем ту же меру с недостатком с точностью до 0,01, затем её же с точностью до 0,001 и продолжают беспредельно этот процесс последовательного вычисления приближённой меры длины A, каждый раз повышая точность в 10 раз. При таком процессе будут получаться последовательно десятичные дроби сначала с одним десятичным знаком, затем с двумя, тремя и дальше всё с большим и большим числом десятичных знаков. Неограниченное продолжение описанного процесса построения десятичных дробей определяет бесконечную непериодическую десятичную дробь. (Эта дробь не может оказаться периодической, иначе её можно было бы обратить в обыкновенную, и отрезок A оказался бы соизмеримым с единицей длины.)

Из алгебры известно, что всякая бесконечная непериодическая десятичная дробь определяет некоторое **иррациональное число**. К таким числам приводит, например, извлечение квадратного корня из числа в том случае, когда этот корень не извлекается точно. Так, $\sqrt{2}$ есть иррацио-

иальное число, представляемое бесконечной десятичной дробью[1]):

$$\sqrt{2} = 1,4142\ldots .$$

Таким образом, бесконечная десятичная дробь, которая получается при приближённом измерении отрезка A, несоизмеримого с единицей B, определяет некоторое иррациональное число. Это число и принимается за точную меру длины A.

Замечание. К тому же самому иррациональному числу можно прийти, вычисляя последовательно приближённые значения длины отрезка A с точностью до 0,1; 0,01; 0,001; ..., но не с недостатком, а с избытком. Действительно, два приближения, взятые с одинаковой десятичной точностью, одно с недостатком, другое с избытком, разнятся между собой лишь последним десятичным знаком. При последовательном повышении степени точности этот последний знак будет отодвигаться всё дальше и дальше вправо от запятой, число общих десятичных знаков обеих дробей будет становиться всё больше и больше. При беспредельном продолжении процесса в обоих случаях получится, таким образом, одна и та же бесконечная десятичная дробь, т. е. одно и то же иррациональное число.

Точное значение бесконечной десятичной дроби считается бо́льшим всякого её приближённого значения, взятого с недостатком, и меньшим всякого её приближённого значения, взятого с избытком.

8(151). Бесконечные десятичные дроби. Введение бесконечных десятичных дробей производится в алгебре на основе следующих определений.

Бесконечная десятичная дробь называется действительным числом.

Две бесконечные десятичные дроби считаются равными, если их десятичные знаки одинакового порядка равны.

Из двух неравных бесконечных десятичных дробей считается бо́льшим действительным числом та дробь, в которой первый из неравных десятичных знаков одинакового порядка со второй дробью больше.

Если в бесконечной десятичной дроби все десятичные знаки, начиная с некоторого порядка, равны нулю, то дробь считается равной той конечной десятичной дроби, которая получится из данной зачёркиванием всех нулей, стоящих справа от последней значащей цифры. Так, бесконечная десятичная дробь 7,8530078000... равна конечной дроби 7,8530078. Бесконечная периодическая дробь с периодом 9 всегда

[1]) Бесконечную десятичную дробь нельзя, конечно, полностью записать на листе бумаги, так как число её десятичных знаков бесконечно. Тем не менее её считают известной, если известен способ, при помощи которого можно определить любое число её десятичных знаков.

заменяется конечной десятичной дробью, получаемой из данной увеличением на единицу её последнего десятичного знака, отличного от 9, и отбрасыванием всех последующих девяток. Так, дробь 3,72999... заменяют конечной дробью 3,73.

9(152). Приближённые значения бесконечной десятичной дроби. Если оборвать данную бесконечную десятичную дробь на её n-м знаке, то полученная конечная дробь называется *приближённым значением бесконечной десятичной дроби* с точностью до $\frac{1}{10^n}$ с недостатком. Если же в этой дроби увеличить на единицу её последний десятичный знак, т. е. прибавить к ней $\frac{1}{10^n}$, то получится новая конечная дробь, которая называется приближённым значением бесконечной дроби с той же точностью с избытком. Если приближённое значение действительного числа α с n десятичными знаками с недостатком обозначим через α_n, а с избытком — через α'_n, то $\alpha'_n=\alpha_n+\frac{1}{10^n}$. Из определения неравенства действительных чисел следует, что действительное число больше всякого его приближённого значения с недостатком и меньше всякого его приближённого значения с избытком. Так, пусть, например, дано действительное число, определяющее $\sqrt{2}=1,414...$ Его приближённое значение с точностью до 0,01 с недостатком: 1,41, с избытком: 1,42; так как

$$1,41=1,41000$$
$$1,42=1,42000,$$

то, в силу определения неравенства действительных чисел, имеем:

$$1,41000\ ...<1,414\ ...<1,42000\ ...,\quad \text{или}\quad 1,41<\sqrt{2}<1,42.$$

10(153). Действия с действительными числами. Сложение. Пусть даны два действительных числа α и β. Возьмём их приближённые значения с произвольным числом n десятичных знаков сначала с недостатком, а затем с избытком. Приближённые значения чисел α и β с недостатком обозначим соответственно через α_n и β_n, а приближённые значения с избытком — через α'_n и β'_n. При этом:

$$\alpha'_n=\alpha_n+\frac{1}{10^n},\quad \beta'_n=\beta_n+\frac{1}{10^n}. \tag{1}$$

Составим теперь суммы $\alpha_n+\beta_n$ и $\alpha'_n+\beta'_n$. Каждая из них есть десятичная дробь, содержащая n десятичных знаков.

Назовём первую γ_n, а вторую γ'_n:

$$\alpha_n+\beta_n=\gamma_n,\quad \alpha'_n+\beta'_n=\gamma'_n.$$

Складывая почленно равенства (1), получим:

$$\alpha'_n+\beta'_n=\alpha_n+\beta_n+\frac{2}{10^n},$$

или $\gamma'_n=\gamma_n+\frac{2}{10^n}$. Это равенство показывает, что дробь γ'_n получается из дроби γ_n прибавлением двух единиц к её последнему десятичному

знаку. Будем теперь увеличивать n. В таком случае дробь γ_n приведёт к образованию бесконечной десятичной дроби, которую обозначим γ. Эта дробь может оказаться или периодической, или непериодической. Допустим, что дробь γ непериодическая. В таком случае она должна содержать бесчисленное множество десятичных знаков, отличных от 9. В этом случае в дроби γ число десятичных знаков, отличных от 9, должно возрастать с возрастанием n. Так как прибавка в дроби γ_n числа $\frac{2}{10^n}$ не может оказать влияния на её десятичные знаки, стоящие левее двух последних знаков, отличных от 9, то число общих первых десятичных знаков в дробях γ_n и γ_n' будет неограниченно возрастать с возрастанием n. Следовательно, дробь γ_n' будет приводить к той же бесконечной десятичной дроби, что и дробь γ_n. При этом из предыдущего следует, что при любом n

$$\gamma_n < \gamma < \gamma_n'. \quad (2)$$

Допустим теперь, что дробь γ периодическая. В таком случае она представляет собой некоторое рациональное число. Это число, как нетрудно сообразить, также удовлетворяет неравенствам (2).

Определение. *Действительное число γ, удовлетворяющее неравенствам* (2), *называется суммой действительных чисел α и β*:

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

11(154). Другие действия с действительными числами. Совершенно аналогичным образом можно определить разность двух действительных чисел, их произведение и частное от деления одного действительного числа на другое. Более подробное изучение результатов этих действий показывает, что определённые таким образом сумма и произведение действительных чисел подчиняются основным законам действий, имеющим место для чисел рациональных: сложение подчиняется переместительному и сочетательному законам:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),$$

а умножение — переместительному, сочетательному и распределительному законам:

$$\alpha\beta = \beta\alpha, \quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma), \quad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

В тех случаях, когда бесконечные десятичные дроби будут периодическими, определённые выше действия над ними будут приводить, как легко показать, к тем же результатам, что и действия над обыкновенными дробями, получаемыми после обращения периодических дробей в простые.

Таким образом, рациональные числа являются лишь частным видом действительных чисел.

12(155). Отношение двух отрезков. Число, получаемое в результате измерения отрезка A, называется численной мерой отрезка. Если отрезок A соизмерим с единицей измерения, то его численная мера есть число рациональное. Если он несоизмерим с единицей длины, то его численная

мера есть иррациональное число, представляемое бесконечной непериодической десятичной дробью.

В дальнейшем под длиной отрезка мы будем подразумевать его численную меру при определённой единице измерения. Под отношением двух отрезков — отношение их численных мер.

Отношение двух отрезков не зависит от того, как выбрана единица измерения. В самом деле, если, например, вместо одной уже выбранной единицы измерения взять другую, в 3 раза меньшую, то в каждом отрезке эта новая единица уложится втрое большее число раз, чем прежняя. В той дроби, которая представляет отношение отрезков, числитель и знаменатель оба увеличатся в 3 раза. Величина же самой дроби от этого не изменится. Если данные отрезки соизмеримы, то при вычислении их отношения за единицу измерения удобно взять их общую меру. В таком случае сразу станет ясно, что отношение двух соизмеримых отрезков равно отношению чисел, показывающих, сколько раз их общая мера укладывается в каждом из них.

II. ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

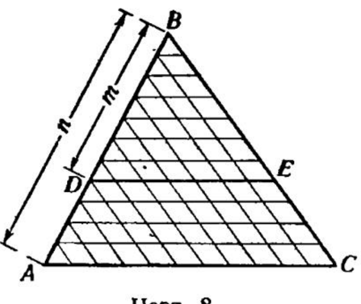
13(156). Предварительные понятия. В окружающей нас жизни часто встречаются фигуры, имеющие различные размеры, но одинаковую форму. Таковы, например, одинаковые фотографии одного и того же лица, изготовленные в различных размерах, или планы здания или целого города, вычерченные в различных размерах. Такие фигуры принято называть **подобными**. Умение измерять длины отрезков позволяет точно определить понятие о геометрическом подобии фигур и дать способы изменения размеров фигуры без изменений её формы. Изменение размеров фигуры без изменений её формы называется подобным преобразованием данной фигуры. Изучение подобия фигур мы начнём с простейшего случая, именно с подобия треугольников.

14(157). Сходственные стороны. В этой главе рассматриваются такие треугольники, у которых углы одного соответственно равны углам другого. Условимся в таких случаях называть **сходственными** те стороны этих треугольников, которые *лежат* между соответственно равными углами (такие стороны также и *противолежат* равным углам).

15(158). Определение. *Два треугольника называются подобными, если:* 1) *углы одного соответственно равны углам другого и* 2) *стороны одного пропорциональны сходственным сторонам другого.*

Что такие треугольники возможны, показывает следующая лемма.

16(159). Лемма[1]). ***Прямая*** (DE, черт. 8), ***параллельная какой-небудь стороне*** (AC) ***треугольника*** (ABC), ***отсекает от него треугольник*** (DBE), ***подобный данному.*** Пусть в треугольнике ABC прямая DE параллельна стороне AC. Требуется доказать, что треугольник DBE подобен треугольнику ABC.



Черт. 8.

Предстоит доказать, во-первых, равенство углов и, во-вторых, пропорциональность сходственных сторон треугольников ABC и DBE.

1. Углы треугольников соответственно равны, так как угол B у них общий, а $\angle D = \angle A$ и $\angle E = \angle C$, как соответственные углы при параллельных DE и AC и секущих AB и CB.

2. Докажем теперь, что стороны $\triangle DBE$ пропорциональны сходственным сторонам $\triangle ABC$, т. е. что

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}.$$

Для этого рассмотрим отдельно следующие два случая.

1) Стороны AB и BD имеют общую меру. Разделим AB на части, равные этой общей мере. Тогда BD разделится на целое число таких частей. Пусть этих частей содержится m в BD и n в AB. Проведём из точек деления ряд прямых, параллельных AC, и другой ряд прямых, параллельных BC. Тогда BE и BC разделятся на равные части, которых будет m в BE и n в BC. Точно так же DE разделится на m равных частей, а AC на n равных частей, причём части DE равны частям AC (как противопо-

---

[1]) Леммой называется вспомогательная теорема, которая излагается для того, чтобы при её помощи доказать следующую за ней теорему.

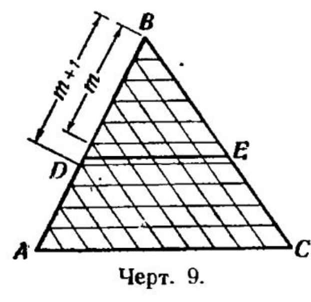
ложные стороны параллелограммов). Теперь очевидно, что

$$\frac{BD}{BA}=\frac{m}{n};\quad \frac{BE}{BC}=\frac{m}{n};\quad \frac{DE}{AC}=\frac{m}{n}.$$

Следовательно, $$\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}.$$

2) Стороны AB и BD не имеют общей меры (черт. 9).

Найдём приближённые значения каждого из отношений $\frac{BD}{BA}$ и $\frac{BE}{BC}$ сначала с точностью до $\frac{1}{10}$, затем — до $\frac{1}{100}$ и далее будем последовательно повышать степень точности в 10 раз.



Черт. 9.

Для этого разделим сторону AB сначала на 10 равных частей и через точки деления проведём прямые, параллельные AC. Тогда сторона BC разделится также на 10 равных частей. Предположим, что $\frac{1}{10}$ доля AB укладывается в BD m раз, причём остаётся остаток, меньший $\frac{1}{10}AB$. Тогда, как видно из чертежа 9, $\frac{1}{10}$ доля BC укладывается в BE также m раз и остаётся остаток, меньший $\frac{1}{10}BC$. Следовательно, с точностью до $\frac{1}{10}$ имеем:

$$\frac{BD}{BA}=\frac{m}{10};\quad \frac{BE}{BC}=\frac{m}{10}.$$

Далее, разделим AB на 100 равных частей и предположим, что $\frac{1}{100}AB$ укладывается m_1 раз в BD. Проводя опять через точки деления прямые, параллельные AC, убеждаемся, что $\frac{1}{100}BC$ укладывается в BE также m_1 раз. Поэтому с точностью до $\frac{1}{100}$ имеем:

$$\frac{BD}{BA}=\frac{m_1}{100}\ \text{и}\ \frac{BE}{BC}=\frac{m_1}{100}.$$

Повышая, далее, степень точности в 10, 100, ... раз, убеждаемся, что приближённые значения отношений $\frac{BD}{BA}$ и $\frac{BE}{BC}$, вичисленные с произвольной, но одинаковой десятичной

точностью, равны. Следовательно, точные значения этих отношений выражаются одной и той же бесконечной десятичной дробью; значит:

$$\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}.$$

Точно так же, проводя через точки деления стороны AB прямые, параллельные стороне BC, найдём, что

$$\frac{BD}{BA}=\frac{DE}{AC}.$$

Таким образом, и в этом случае имеем:

$$\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}.$$

17(160). Замечания: 1) Доказанные соотношения представляют собой три следующие пропорции:

$$\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC};\ \frac{BD}{BA}=\frac{DE}{AC};\ \frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}.$$

Переставив в них средние члены, получим:

$$\frac{BD}{BE}=\frac{BA}{BC};\ \frac{BD}{DE}=\frac{BA}{AC};\ \frac{BE}{DE}=\frac{BC}{AC}.$$

Таким образом, *если в треугольниках стороны пропорциональны, то отношение любых двух сторон одного треугольника равно отношению сходственных сторон другого треугольника.*

2) Подобие фигур обозначается иногда знаком $\backsim$.

Три признака подобия треугольников.

18(161). Теоремы. ***Если в двух треугольниках:***

1) ***два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого;*** или

2) ***две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, лежащие между этими сторонами, равны;*** или

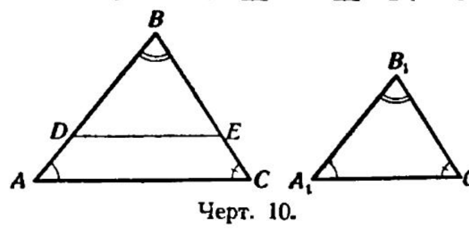
3) ***если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого,***

то такие треугольники подобны.

1) Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 10) будут два треугольника, у которых $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$ и, следовательно, $\angle C=\angle C_1$.

Требуется доказать, что такие треугольники подобны. Отложим на AB отрезок BD, равный A_1B_1, и проведём $DE \parallel AC$.

Тогда получим вспомогательный $\triangle DBE$, который, согласно доказанной выше лемме, подобен $\triangle ABC$. С другой стороны, $\triangle DBE = \triangle A_1B_1C_1$, потому что у них: $BD = A_1B_1$ (по построению), $\angle B = \angle B_1$ (по условию) и $\angle D = \angle A_1$ (потому что $\angle D = \angle A$ и $\angle A = \angle A_1$). Но очевидно, что если из двух равных треугольников один подобен третьему, то и другой ему подобен; следовательно,

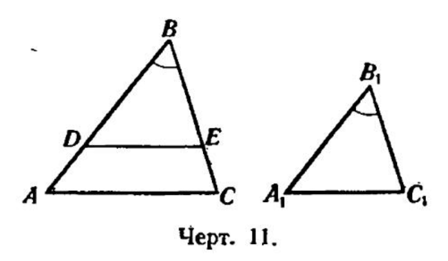


Черт. 10.

$$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC.$$

2) Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 11) дано:

$$\angle B = \angle B_1 \text{ и } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}. \qquad (1)$$



Черт. 11.

Требуется доказать, что такие треугольники подобны.

Отложим снова на AB отрезок BD, равный A_1B_1, и проведём $DE \parallel AC$. Тогда получим вспомогательный $\triangle DBE$, подобный $\triangle ABC$. Докажем, что он равен $\triangle A_1B_1C_1$. Из подобия треугольников ABC и DBE следует:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE}. \qquad (2)$$

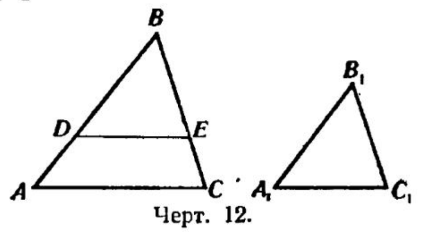
Сравнивая эту пропорцию с данной пропорцией (1), замечаем, что первые отношения обеих пропорций одинако-

вы ($DB = A_1B_1$ по построению); следовательно, остальные отношения этих пропорций также равны, т. е.

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BC}{BE}.$$

Но если в пропорции предыдущие члены равны, то должны быть равны и последующие члены, значит:

$$B_1C_1 = BE.$$



Черт. 12.

Теперь видим, что треугольники DBE и $A_1B_1C_1$ имеют по равному углу ($\angle B = \angle B_1$), заключённому между соответственно равными сторонами; значит, эти треугольники равны. Но $\triangle DBE$ подобен $\triangle ABC$, поэтому и $\triangle A_1B_1C_1$ подобен $\triangle ABC$.

3) Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 12) дано:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}. \qquad (1)$$

Требуется доказать, что такие треугольники подобны.

Сделав построение такое же, как и прежде, покажем, что $\triangle DBE = \triangle A_1B_1C_1$. Из подобия треугольников ABC и DBE следует:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE}. \qquad (2)$$

Сравнивая этот ряд отношений с данным рядом (1), замечаем, что первые отношения у них равны, следовательно, и остальные отношения равны, и потому

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BC}{BE},$$

откуда

$$B_1C_1 = BE$$

и

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AC}{DE},$$

откуда

$$A_1C_1 = DE.$$

Теперь видим, что треугольники DBE и $A_1B_1C_1$ имеют по три соответственно равные стороны; значит, они равны. Но один из них, именно $\triangle DBE$, подобен $\triangle ABC$; следовательно, и другой $\triangle A_1B_1C_1$ подобен $\triangle ABC$.

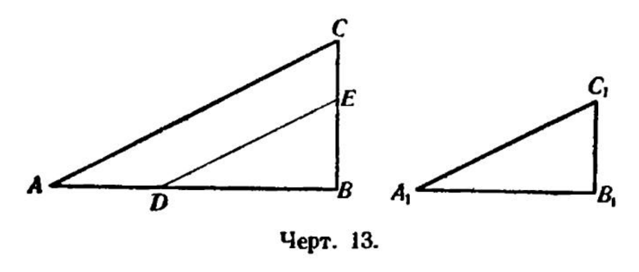
19(162). Замечания о приёме доказательства. Полезно обратить внимание на то, что приём доказательства, употреблённый нами в трёх предыдущих теоремах, один и тот же, а именно: отложив на стороне большего треугольника отрезок, равный сходственной стороне меньшего, и проведя прямую, параллельную другой стороне, мы образуем вспомогательный треугольник, подобный большему данному. После этого, в силу условия доказываемой теоремы и свойства подобных треугольников, мы обнаруживаем равенство вспомогательного треугольника меньшему данному и, наконец, заключаем о подобии данных треугольников.

Признаки подобия прямоугольных треугольников.

20(163). Два признака, ие требующие особого доказательства. Так как прямые углы всегда равны друг другу, то, на основании доказанных признаков подобия треугольников, мы можем утверждать, что ***если в двух прямоугольных треугольниках:***

1) ***острый угол одного равен острому углу другого*** или

2) ***катеты одного пропорциональны катетам другого, то такие треугольники подобны.***



Черт. 13.

21(164). Признак, требующий особого доказательства.

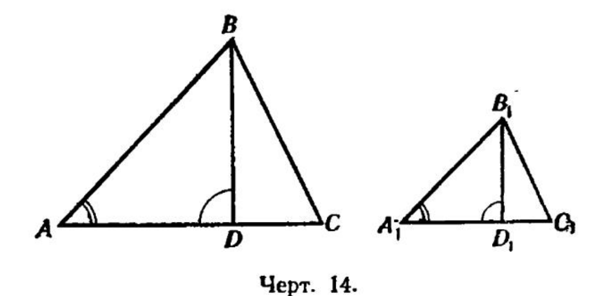
Теорема. ***Если гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники подобны.***

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника (черт. 13), у которых углы B и B_1 прямые и

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}. \tag{1}$$

Требуется доказать, что такие треугольники подобны.

Для доказательства применим тот же приём, которым мы пользовались ранее. На AB отложим $BD = A_1B_1$ и проведём $DE \parallel AC$. Тогда получим вспомогательный $\triangle DBE$,



Черт. 14.

подобный $\triangle ABC$. Докажем, что он равен $\triangle A_1B_1C_1$. Из подобия треугольников ABC и DBE следует:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DE}. \tag{2}$$

Сравнивая эту пропорцию с данной (1), находим, что первые отношения их одинаковы; следовательно, равны и вторые отношения, т. е.

$$\frac{AC}{DE} = \frac{AC}{A_1C_1},$$

откуда

$$DE = A_1C_1.$$

Теперь видим, что треугольники DBE и $A_1B_1C_1$ имеют по равной гипотенузе и равному катету, следовательно, они равны; а так как один из них подобен $\triangle ABC$, то и другой ему подобен.

22(165). Теорема (об отношении высот). ***В подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны сходственным высотам,*** т. е. тем высотам, которые опущены на сходственные стороны.

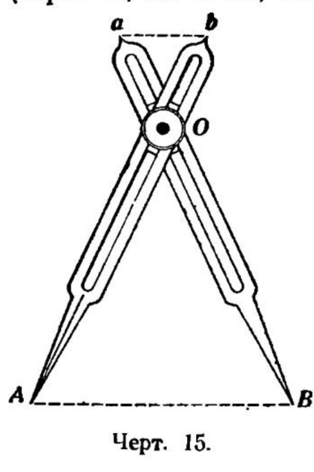
Действительно, если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 14) подобны, то прямоугольные треугольники BAD и $B_1A_1D_1$

также подобны ($\angle A = \angle A_1$ и $\angle D = \angle D_1$); поэтому:

$$\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

23(166). Делительный циркуль. На подобии треугольников основано употребление делительного циркуля, посредством которого можно быстро разделить данный небольшой отрезок на несколько равных частей.

Прибор этот состоит из двух одинаковых ножек (черт. 15) *Ab* и *Ba*, концы которых заострены. Вдоль ножек сделаны прорезы, в которых можно передвигать подвижный винт и закреплять его в том или другом месте ножек. Ножки можно раздвигать и сближать, вращая их вокруг винта. Положим, требуется разделить отрезок *AB* на три равные части. Для этого укрепим винт в такой точке *O*, чтобы расстояние *AO* было в 3 раза больше расстояния *Ob* (что легко выполнить по тем делениям и цифрам, которые проставлены по краям прореза). Затем растворяем циркуль и располагаем его так, как указано на чертеже. Тогда расстояние между остриями *a* и *b* будет составлять $\frac{1}{3}$ длины *AB*, так как из подобия треугольников *AOB* и *aOb* следует:



Черт. 15.

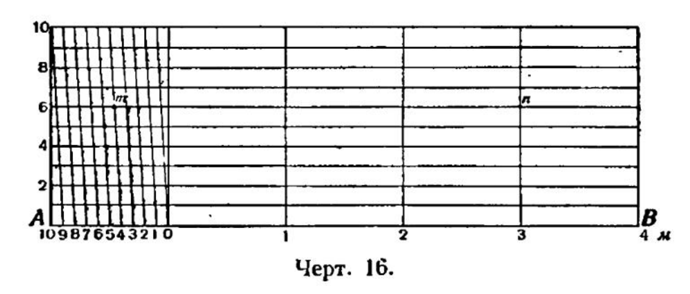
$$ab : AB = Ob : OA = 1 : 3.$$

Остаётся затем, перевернув циркуль, отложить на отрезке *AB* три раза отрезок *ab*.

24(167). Поперечный масштаб. На свойствах подобных треугольников основано также изготовление поперечного масштаба, устройство которого понятно из чертежа 16.

Пусть крупные деления линии *AB* представляют в уменьшенном виде метры. Тогда мелкие деления представляют дециметры. Чтобы получить сантиметры, пришлось бы подразделить мелкие деления ещё на 10 равных частей, что, по причине малости этих частей, было бы невыполнимо на линейном масштабе (т. е. на самой линии *AB*).

Поперечный масштаб позволяет отсчитывать и сантиметры. Для разъяснения этого изобразим отдельно в увеличенном виде (черт. 17) тот узкий прямоугольный треугольник, который на нашем чертеже расположен вправо.



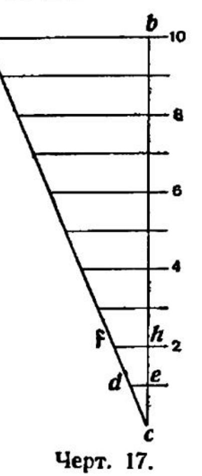
Черт. 16.

Параллельные линии отсекают от этого треугольника подобные треугольники, и потому мы можем написать пропорции:

$$de : ab = ce : cb = 1 : 10;$$
$$fh : ab = ch : cb = 2 : 10 \text{ и т. д.;}$$

значит,

$$de = \frac{1}{10} ab; \quad fh = \frac{2}{10} ab \text{ и т. д.}$$



Черт. 17.

Теперь понятно, что если мы возьмём на нашем масштабе циркулем отрезок, положим, от точки m до точки n (черт. 16), то этот отрезок составит:

$$3 \text{ м } 4 \text{ дм } 6 \text{ см} = 3{,}46 \text{ м}.$$

III. ПОДОБИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ.

25(168). Определение. Два одноимённых многоугольника[1]) называются **подобными**, если углы одного равны соответственно углам другого, а стороны, заключающие равные углы, пропорциональны. Это значит, что если многоугольник $ABCDE$ подобен многоугольнику $A_1B_1C_1D_1E_1$ (черт. 19), то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,

[1]) Одноимёнными называются многоугольники, имеющие одинаковое число углов, а следовательно, и сторон.

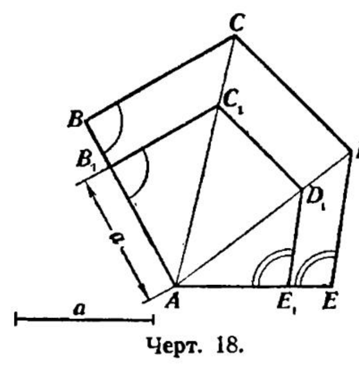
$\angle D = \angle D_1$, $\angle E = \angle E_1$ и

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}.$$

При этом стороны многоугольников AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CD и C_1D_1 и т. д. называются сходственными сторонами.

Что такие многоугольники возможны, будет видно из решения следующей задачи.

26(169). Задача. *Дан многоугольник ABCDE и отрезок a. Построить другой многоугольник, который был бы подобен данному и у которого сторона, сходственная стороне AB данного многоугольника, равнялась бы a* (черт. 18).



Черт. 18.

Всего проще это можно сделать так. На стороне AB отложим $AB_1 = a$ (если $a > AB$, то точка B_1 расположится на продолжении AB). Затем, проведя из A все диагонали, построим $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1D_1 \parallel CD$ и $D_1E_1 \parallel DE$.

Тогда получим многоугольник $AB_1C_1D_1E_1$, подобный многоугольнику $ABCDE$.

Действительно, во-первых, углы одного из них соответственно равны углам другого; так, угол A у них общий, $\angle B_1 = \angle B$ и $\angle E_1 = \angle E$, как соответственные углы при параллельных прямых; $\angle C_1 = \angle C$ и $\angle D_1 = \angle D$, так как углы эти состоят из частей, соответственно равных друг другу.

Во-вторых, мы имеем пропорции:

из подобия треугольников AB_1C_1 и ABC: $\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC}$;

» » » AC_1D_1 и ACD: $\frac{AC_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{AD_1}{AD}$;

» » » AD_1E_1 и ADE: $\frac{AD_1}{AD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{AE_1}{AE}$.

Так как третье отношение первого ряда равно первому отношению второго ряда и третье отношение второго ряда равно первому отношению третьего ряда, то, значит, все

9 отношений равны между собой. Выбросив из них отношения, в которые входят диагонали, можем написать:

$$\frac{AB_1}{AC}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{AE_1}{AE}.$$

Мы видим, таким образом, что у одноимённых многоугольников $ABCDE$ и $AB_1C_1D_1E_1$ углы соответственно равны и сходственные стороны пропорциональны; значит, многоугольники эти подобны.

27(170). Замечание. Для треугольников, как мы видели [§ 18 (161)], равенство углов влечёт за собой пропорциональность сторон и, обратно, пропорциональность сторон влечёт за собой равенство углов; вследствие этого для треугольников одно равенство углов или одна пропорциональность сторон служит достаточным признаком их подобия. Для многоугольников же одного равенства углов или одной пропорциональности сторон ещё недостаточно для их подобия; например, у квадрата и прямоугольника углы равны, но стороны не пропорциональны, у квадрата же и ромба стороны пропорциональны, а углы не равны.

28(171). Теорема (о разложении подобных многоугольников на подобные треугольники). ***Подобные многоугольники можно разложить на одинаковое число подобных и одинаково расположенных треугольников.***

Например, подобные многоугольники $ABCDE$ и $AB_1C_1D_1E_1$ (черт. 18) разделены диагоналями на подобные треугольники, одинаково расположенные.

Укажем ещё такой способ разложения. Возьмём внутри многоугольника $ABCDE$ (черт. 19) произвольную точку O и соединим её со всеми вершинами. Тогда многоугольник $ABCDE$ разобьётся на столько треугольников, сколько в нём сторон. Возьмём один из них, например AOE (покрытый на чертеже штрихами), и на сходственной стороне A_1E_1 другого многоугольника построим углы $O_1A_1E_1$ и $O_1E_1A_1$, соответственно равные углам OAE и OEA; точку пересечения O_1 соединим с прочими вершинами многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$. Тогда и этот многоугольник разобьётся на то же число треугольников. Докажем, что треугольники первого многоугольника соответственно подобны треугольникам второго многоугольника. $\triangle AOE$ подобен $\triangle A_1O_1E_1$ по построению.

Чтобы доказать подобие соседних треугольников ABO и $A_1B_1O_1$, примем во внимание, что из подобия многоугольников следует, что

$$\angle BAE = \angle B_1A_1E_1 \text{ и } \frac{BA}{B_1A_1} = \frac{AE}{A_1E_1}, \qquad (1)$$

и из подобия треугольников AOE и $A_1O_1E_1$ выводим:

$$\angle OAE = \angle O_1A_1E_1 \text{ и } \frac{AO}{A_1O_1} = \frac{AE}{A_1E_1}. \qquad (2)$$

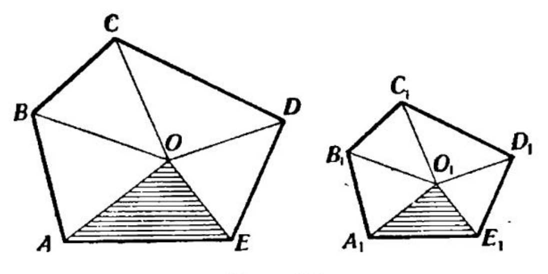
Из равенств (1) и (2) следует:

$$\angle BAO = \angle B_1A_1O_1 \text{ и } \frac{BA}{B_1A_1} = \frac{AO}{A_1O_1}.$$

Теперь видим, что треугольники ABO и $A_1B_1O_1$ имеют по равному углу, заключённому между пропорциональными сторонами; значит, они подобны.

Совершенно так же докажем подобие треугольников BCO и $B_1C_1O_1$, затем треугольников COD и $C_1O_1D_1$ и т. д. При этом очевидно, что подобные треугольники в обоих многоугольниках одинаково расположены.

29(172). Теорема (об отношении периметров подобных многоугольников). ***Периметры подобных многоугольников относятся, как сходственные стороны.***



Черт. 19.

Пусть многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (черт. 19) подобны; тогда по определению:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}.$$

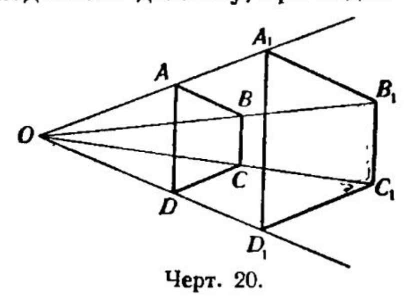
Если имеем ряд равных отношений, то сумма всех предыдущих членов относится к сумме всех последующих, как

какой-нибудь из предыдущих членов относится к своему последующему, поэтому

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \dots .$$

30(173). Коэффициент подобия. Отношение сходственных сторон двух подобных многоугольников (или треугольников) называется **коэффициентом подобия** этих многоугольников (или треугольников).

31(174). Подобное преобразование многоугольников. Построение многоугольника, подобного данному, при заданном коэффициенте подобия называется подобным преобразованием данного многоугольника.



Черт. 20.

Способ построения многоугольника, подобного данному, изложенный в § 26(169), является частным видом подобного преобразования. Общий метод (такого преобразования) состоит в следующем. Пусть требуется подобно преобразовать четырёхугольник $ABCD$ (черт. 20) при коэффициенте подобия, равном k. Возьмём какую-нибудь точку O на плоскости; соединив её с вершинами данного четырёхугольника, получим прямые OA, OB, OC и OD. На прямой OA отложим от точки O в сторону точки A отрезок OA_1, равный $k \cdot OA$, так что $OA_1 = k \cdot OA$ (на чертеже $k = \frac{5}{3}$).

Продолжим также прямую OB и отложим на ней от точки O в сторону точки B отрезок OB_1, равный $k \cdot OB$, так что $OB_1 = k \cdot OB$.

Точно так же поступим с прямыми OC и OD. Мы получим на них точки C_1 и D_1, причём $OC_1 = k \cdot OC$ и $OD_1 = k \cdot OD$. Соединив последовательно точки A_1, B_1, C_1 и D_1, получим искомый четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$. В самом деле, из равенств $OA_1 = k \cdot OA$, $OB_1 = k \cdot OB$, $OC_1 = k \cdot OC$ и $OD_1 = k \cdot OD$ следует:

$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = \frac{OC_1}{OC} = \frac{OD_1}{OD} = k.$$

Сравним треугольники OAB и OA_1B_1. Они имеют общий угол в вершине O и, кроме того,

$$\frac{OA_1}{OA}=\frac{OB_1}{OB},$$

следовательно, эти треугольники подобны [§ 18(161), 2-й случай]. Из их подобия заключаем:

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{OA_1}{OA}=k \text{ и } \angle OAB=\angle OA_1B_1, \qquad (1)$$

следовательно, $AB \parallel A_1B_1$.

Совершенно так же покажем, что треугольники OBC и OB_1C_1 подобны. Отсюда следует:

$$\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{OB_1}{OB}=k,\ \angle OBC=\angle OB_1C_1 \qquad (2)$$

и, следовательно, $BC \parallel B_1C_1$.

Таким же образом докажем подобие следующих треугольников: OCD и OC_1D_1, затем треугольников OAD и OA_1D_1. Из подобия $\triangle OCD$ и $\triangle OC_1D_1$ следует:

$$\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{OC_1}{OC}=k \text{ и } CD \parallel C_1D_1. \qquad (3)$$

Из подобия $\triangle OAD$ и $\triangle OA_1D_1$ следует:

$$\frac{A_1D_1}{AD}=\frac{OD_1}{OD}=k \text{ и } AD \parallel A_1D_1. \qquad (4)$$

Из равенств (1), (2), (3) и (4) следует:

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{A_1D_1}{AD}=k.$$

Кроме того, $\angle DAB=\angle D_1A_1B_1$, как углы с параллельными сторонами.

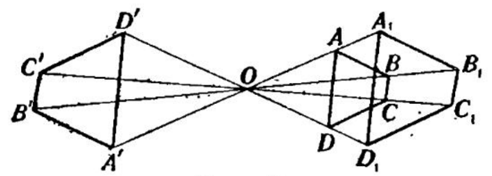
По той же причине имеем равенство углов:

$$\angle ABC=\angle A_1B_1C_1,$$
$$\angle BCD=\angle B_1C_1D_1,$$
$$\angle CDA=\angle C_1D_1A_1.$$

Мы видим, таким образом, что у четырёхугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ углы соответственно равны и сходственные стороны пропорциональны; значит, эти четырёхугольники подобны, причём коэффициент их подобия равен k.

32(175). Центр подобия. При подобном преобразовании многоугольника способом, изложенным в § 31(174), точка O называется **центром подобия** обоих многоугольников.

Подобное преобразование многоугольника можно выполнять несколько иначе. Именно, взяв точку O и соединив её с вершинами четырёхугольника $ABCD$, можно продолжить прямые OA, OB,... за точку O; затем на прямой OA от точки O в сторону, противоположную точке A, отложим отрезок OA', равный $k \cdot OA$. Точно так же на продолжениях прямых OB, OC,... от точки O отложим отрезки OB', OC',..., равные соответственно отрезкам $k \cdot OB$, $k \cdot OC$,... (черт. 21); соединив последовательно точки A', B', C', D', получим четырёхугольник $A'B'C'D'$, очевидно



Черт. 21.

симметричный $A_1B_1C_1D_1$ относительно точки O. Следовательно, четырёхугольники $A'B'C'D'$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны и, значит, четырёхугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ подобны, причём коэффициент их подобия равен k. При первом способе преобразования точка O называется внешним центром подобия многоугольников (черт. 20); при втором способе — внутренним центром их подобия (черт. 21).

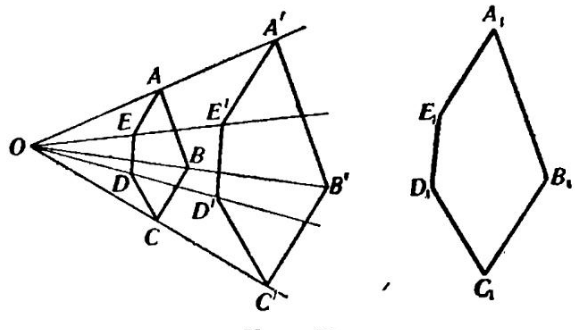
Замечание. При выполнении преобразования можно одинаково пользоваться как внутренним, так и внешним центром подобия. И тот и другой можно выбирать совершенно произвольно. В частности, если принять одну из вершин многоугольника за внешний центр подобия и выполнить подобное преобразование, то получим как раз тот способ построения подобного многоугольника, который был изложен в § 26 (169).

33(176). Перспективное расположение подобных многоугольников. Расположение двух многоугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ на чертеже 20, а также многоугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ на чертеже 21 имеет следующие свойства: 1) сходственные стороны обоих многоугольников параллельны; 2) прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке.

Такое расположение двух многоугольников называется **перспективным**. Докажем, что в такое расположение можно привести любые два подобных многоугольника.

Пусть даны два подобных многоугольника $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (черт. 22). Возьмём какую-либо точку O за центр подобия и построим

многоугольник, подобный и перспективный с $ABCDE$, причём коэффициент подобия возьмём равным отношению $\frac{A_1B_1}{AB}$. Мы получим многоугольник $A'B'C'D'E'$, подобный $ABCDE$ и в то же время равный $A_1B_1C_1D_1E_1$. В самом деле, так как коэффициент подобия многоугольников $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ равен $\frac{A_1B_1}{AB}$, то $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A_1B_1}{AB}$, отсюда $A'B'=A_1B_1$.



Черт. 22.

Но многоугольники $A_1B_1C_1D_1E_1$ и $A'B'C'D'E'$ подобны между собой, следовательно,

$$\frac{A'B'}{A_1B_1}=\frac{B'C'}{B_1C_1}=\frac{C'D'}{C_1D_1}=\frac{D'E'}{D_1E_1}=\frac{A'E'}{A_1E_1}.$$

А потому из равенства $A'B'=A_1B_1$ вытекает $B'C'=B_1C_1$, $C'D'=C_1D_1$, $D'E'=D_1E_1$, $A'E'=A_1E_1$. Так как, кроме того, углы многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$ равны соответствующим углам многоугольника $A'B'C'D'E'$, то эти многоугольники равны между собой. Если наложить многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$ на $A'B'C'D'E'$ так, чтобы они совпадали, то многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$ примет перспективное расположение с $ABCDE$.

IV. ПОДОБИЕ ФИГУР ПРОИЗВОЛЬНОГО ВИДА.

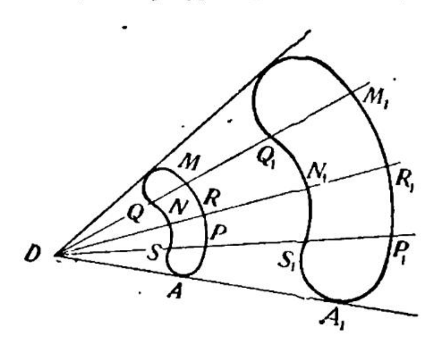
34(177). Способ подобного преобразования многоугольников, изложенный выше, даёт возможность обобщить самое понятие о подобии на случай, когда фигура образована кривыми линиями. Именно такой способ построения подобной фигуры можно применить к любой фигуре. Пусть, например, на плоскости дана фигура A совершенно произвольной формы (черт. 23).

Возьмём произвольную точку O на плоскости этой фигуры и будем соединять её с различными точками $M, N, P, \ldots$ фигуры A. На каждой из проведённых прямых OM, ON, OP, ... отложим отрезки OM_1, ON_1, OP_1 такие, что:

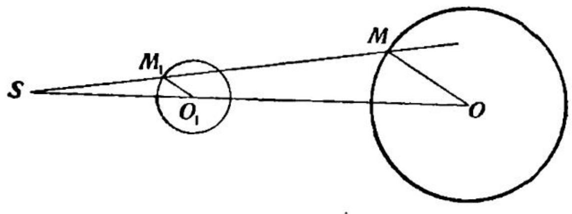
$$\frac{OM_1}{OM}=\frac{ON_1}{ON}=\frac{OP_1}{OP}=\ldots .$$

Точки M_1, N_1, P_1, ... будут лежать на некоторой новой фигуре A_1. Чем больше точек M, N, P, ... мы возьмём на фигуре A, тем больше мы получим точек фигуры A_1.

Чтобы получить всю фигуру A_1, нужно провести прямые из точки O ко всем точкам фигуры A и построить на них соответствующие точки фигуры A_1. Вся полученная таким образом фигура A_1 называется фигурой, подобной A. В отдельных случаях, чтобы получить фигуру A_1, нет необходимости проводить лучи ко всем точкам фигуры A, достаточно построить лишь несколько её точек и затем, пользуясь частными свойствами фигуры A, восстановить всю фигуру A_1. Так, в том случае, когда A — многоугольник, достаточно было соединить точку O лишь с вершинами этого многоугольника и построить вершины подобного многоугольника, а затем соединить прямолинейными отрезками полученные вершины между собой. Такой переход от фигуры A к фигуре A_1 называется подобным преобразованием фигуры A. Подобное преобразование фигур является одним из весьма важных видов геометрических преобразований, имеющих огромное применение на практике. Показываемая в кино картина на экране подобна изображению, сделанному на плёнке; технические чертежи планов и фасадов зданий, планов местности, планов городов и т. п. получаются в результате подобного преобразования.



Черт. 23.



Черт. 24.

35 (178). Подобие окружностей. Докажем, что фигура, подобная окружности, есть также окружность.

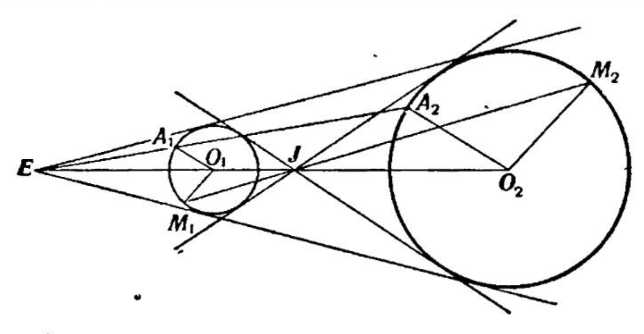
Теорема. ***Геометрическое место точек, делящих в данном отношении отрезки лучей, соединяющих какую-нибудь точку с точками окружности, есть окружность.***

Пусть дана окружность радиуса R с центром в точке O (черт. 24). Возьмём произвольную точку S и, соединив её с точкой O, разделим отрезок SO точкой O_1 в некотором отношении так, что $\frac{SO_1}{SO} = k$.

Возьмём произвольную точку M на данной окружности и соединим её с точкой S. На отрезке SM найдём точку M_1 такую, что $\frac{SM_1}{SM}=\frac{SO_1}{SO}=k$. Для этой цели следует из точки O_1 провести прямую, параллельную OM, до пересечения с прямой SM. Из подобия треугольников SOM и SO_1M_1 следует $\frac{O_1M_1}{OM}=\frac{SO_1}{SO}$. Следовательно, $\frac{O_1M_1}{OM}=k$. Отсюда найдём длину отрезка O_1M_1, именно $O_1M_1=k\cdot OM$, или $O_1M_1=k\cdot R$.

Мы видим, что величина O_1M_1 есть некоторая постоянная величина, не зависящая от положения точки M на данной окружности. Следовательно, если точка M будет перемещаться по окружности, то точка M_1 будет перемещаться по плоскости, описывая окружность с центром O_1 и радиусом kR.

36(179). Теорема. ***Две окружности на плоскости всегда можно рассматривать как перспективно-подобные фигуры, причём они имеют два центра подобия: один внешний, другой внутренний.*** Пусть даны две окружности с центрами



Черт. 25.

O_1 и O_2 и радиусами R_1 и R_2 (черт. 25). Проведём линию центров O_1O_2 и построим на ней две точки J и E, определяемые равенствами:

$$\frac{O_1J}{O_2J}=\frac{R_1}{R_2} \text{ и } \frac{O_1E}{O_2E}=\frac{R_1}{R_2}.$$

Легко заметить, что точки J и E обладают свойствами центров подобия. Возьмём какую-либо точку M_1 на первой окружности, проведём прямую JM_1 и отложим на ней отрезок JM_2 так, что $JM_1:JM_2=R_1:R_2$; $\triangle JO_1M_1 \backsim \triangle JO_2M_2$, так как $\angle O_1JM_1=\angle O_2JM_2$, $\frac{JM_1}{JM_2}=\frac{R_1}{R_2}$ и $\frac{O_1J}{O_2J}=\frac{R_1}{R_2}$; следовательно,

$$\frac{O_1M_1}{O_2M_2}=\frac{R_1}{R_2}, \text{ и так как } O_1M_1=R_1, \text{ то } O_2M_2=R_2.$$

Это значит, что точка M_2 лежит на второй окружности. Следовательно, точка J есть внутренний центр подобия данных окружностей. Таким же образом можно доказать, что E есть внешний центр подобия.

Построение точек J и E можно выполнить так: проводим в данных окружностях два каких-либо параллельных радиуса и соединяем их концы, полученная прямая пересечёт линию центров в центре подобия. При этом, если проведённые радиусы направлены в одну сторону (черт. 25, O_1A_1 и O_2A_2), то центр подобия будет внешним; если они направлены в противоположные стороны (черт. 25, O_1M_1 и O_2M_2), то центр подобия будет внутренний. Легко, далее, заметить, что если две окружности касаются, то один из центров подобия совпадает с точкой касания. При этом, если касание окружностей внешнее, то в точке касания находится внутренний центр подобия, если же касание внутреннее, то с точкой касания совпадает внешний центр подобия окружностей.

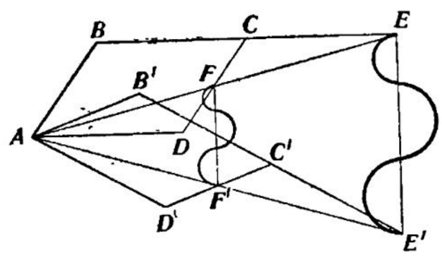
Упражнение 1. Доказать, что если две окружности лежат одна вне другой, то их внешний центр подобия совпадает с точкой пересечения их общих внешних касательных, а внутренний — с точкой пересечения общих внутренних касательных.

2. Какое положение должны иметь две окружности на плоскости, чтобы их внешний центр подобия совпал с внутренним?

Ответ. Окружности концентричны.

37(180). Пантограф. Подобное преобразование фигур можно выполнять механически с помощью особого прибора, изобретённого в 1603 г. Христофором Шейнером и названного им пантографом.

Вообразим параллелограмм $ABCD$ (черт. 26), сторонами которого служат металлические стержни, могущие на шарнирах вращаться вокруг вершин. Укрепим неподвижно вершину A, возьмём на продолжении BC произвольную точку E и заставим эту точку описать какую-либо линию EE'. Пусть F — точка пересечения прямых AE и CD и $AB'C'D'$ — новое положение нашего шарнирного параллелограмма. Так как длина сторон параллелограмма и длина отрезков CE и CF при перемещении точки E не изменялись, то можем написать последовательно следующие пропорции:



Черт. 26.

$$\frac{AD}{CE}=\frac{DF}{FC}=\frac{AF}{FE} \text{ (так как } \triangle ADF \backsim \triangle ECF\text{)}; \quad \frac{AD'}{C'E'}=\frac{D'F'}{F'C'};$$

отсюда следует, что $\triangle AD'F' \backsim \triangle E'C'F'$; следовательно, $\angle AF'D' = \angle E'F'C'$, т. е. точки A, F' и E' лежат на одной прямой. Далее, из подобия тех же треугольников имеем, что $\frac{AF'}{F'E'}=\frac{D'F'}{F'C'}$, но

$$\frac{D'F'}{F'C'}=\frac{DF}{FC}=\frac{AF}{FE};$$

следовательно, $\frac{AF'}{F'E'}=\frac{AF}{FE}$.

Отсюда следует, что треугольники AEE' и AFF' подобны, следовательно, $\angle AFF' = \angle AEE'$ и $EE' \parallel FF'$.

Далее из чертежа находим:

$$\frac{AF}{FE} = \frac{BC}{CE} \text{ и } \frac{AF'}{F'E'} = \frac{B'C'}{C'E'}.$$

Составляя производные пропорции, можем написать:

$$\frac{AF + FE}{AF} = \frac{BC + CE}{BC}$$

и

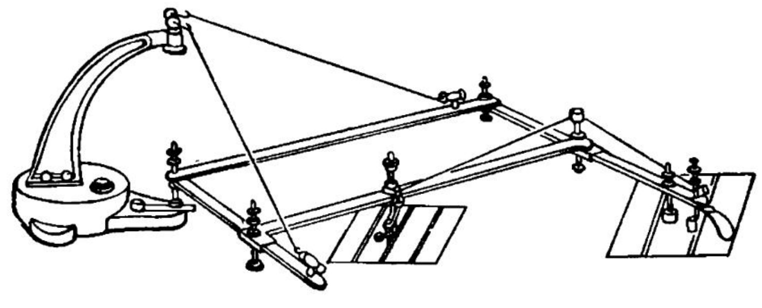
$$\frac{AF' + F'E'}{AF'} = \frac{B'C' + C'E'}{B'C'}$$

или

$$\frac{AE}{AF} = \frac{BE}{BC} \text{ и } \frac{AE'}{AF'} = \frac{B'E'}{B'C'};$$

но $BE = B'E'$ и $BC = B'C'$; следовательно,

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AE'}{AF'} = \frac{BE}{BC}.$$



Черт. 27.

Это равенство показывает, что когда точка E опишет какую-либо фигуру, точка F опишет подобную фигуру, причём коэффициент подобия этих фигур равен отношению $\frac{BE}{BC}$. Если в точке E укрепить остриё иглы, а в F — остриё карандаша, то при обводе остриём иглы контура фигуры остриё карандаша зарисует на бумаге контур фигуры подобной. Для изменения показателя подобия следует переместить точку E по прямой BC в ту или другую сторону. На этом свойстве шарнирного параллелограмма и основано устройство пантографа, общий вид которого представлен на чертеже 27. Прибор применяется при перерисовке планов в различных масштабах.

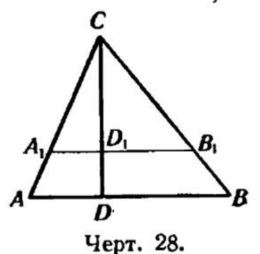
Для подобного преобразования фигур небольшого размера и несложной формы можно пользоваться также делительным циркулем [§ 23 (166)]. Для этого следует установить подвижной винт циркуля так, чтобы он делил всю длину ножки в отношении, равном заданному коэффициенту подобия, затем выбрать центр подобия и соединить

его лучами с основными точками фигуры. На каждом луче следует измерить одним раствором циркуля отрезок от центра подобия до точки фигуры и, перевернув циркуль, отложить на том же луче от центра подобия отрезок, полученный в другом растворе. Таким способом можно перечертить все основные точки данной фигуры и получить её очертание в нужном размере.

Задачи на построение.

38(181). Метод подобия. Подобное преобразование фигур можно с успехом применить к решению многих задач на построение. На этом основан так называемый метод подобия.

Метод подобия состоит в том, что, пользуясь некоторыми данными задачи, строят сначала фигуру, подобную искомой, а затем переходят к искомой. Этот метод особенно удобен тогда, когда только одна данная величина есть длина, а все прочие величины — или углы, или отношения линий; таковы, например, задачи: построить треугольник по данному углу, стороне и отношению двух других сторон или по двум углам и длине некоторого отрезка (высоте, медиане, биссектрисе и т. п.); построить квадрат по данной сумме или разности диагонали и стороны и т. п.



Черт. 28.

Решим, например, такую задачу:

Задача 1. *Построить треугольник, когда даны один из его углов C, отношение сторон $AC : BC$, заключающих этот угол, и высота h, опущенная из вершины этого угла на противоположную сторону* (черт. 28).

Пусть $AC : BC = m : n$, где m и n — два данных отрезка или два данных числа. Строим угол C, на его сторонах откладываем отрезки CA_1 и CB_1, пропорциональные m и n. Если m и n — отрезки, то берём прямо $CA_1 = m$ и $CB_1 = n$. Если m и n числа, то, выбрав произвольный отрезок l, строим отрезки $CA_1 = ml$ и $CB_1 = nl$.

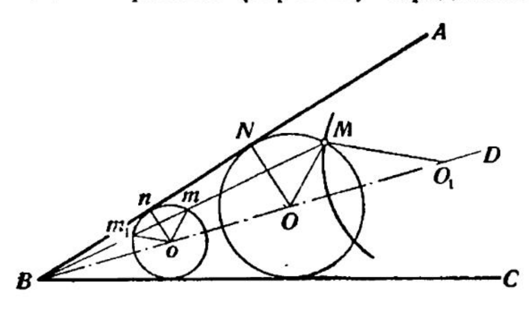
В обоих случаях имеем $CA_1 : CB_1 = m : n$.

Треугольник CA_1B_1, очевидно, подобен искомому треугольнику.

Чтобы получить искомый треугольник, построим в треугольнике CA_1B_1 высоту CD_1, обозначив её через h_1.

Выбираем теперь произвольный центр подобия и строим треугольник, подобный треугольнику A_1B_1C с коэффициентом подобия, равным отношению $\frac{h}{h_1}$, где h — высота искомого треугольника. Полученный таким путём треугольник и будет искомым.

Удобнее всего выбрать центр подобия прямо в точке C. В таком случае построение искомого треугольника становится особенно простым (черт. 28) Продолжаем высоту



Черт. 29.

CD_1 треугольника A_1B_1C, откладываем на ней отрезок CD, равный h, и проводим прямую AB, параллельную A_1B_1. Треугольник ABC — искомый.

В задачах этого рода положение искомой фигуры остаётся произвольным; но во многих вопросах требуется построить фигуру, положение которой относительно даниых точек или линий вполне определено. При этом может случиться. что, отрешившись от какого-нибудь одного из условий положения и оставив все остальные, мы получим бесчисленное множество фигур, подобных искомой. В таком случае метод подобия может быть употреблён с пользой. Приведём примеры.

Задача 2. *В данный угол ABC вписать окружность, которая проходила бы через данную точку M* (черт. 29).

Отбросим на время требование, чтобы окружность проходила через точку M. Тогда данному условию удовлетворяет бесчисленное множество окружностей, центры которых лежат на биссектрисе BD. Построим одну из таких окружностей, например ту, центр которой есть o. Возьмём на ней точку m, сходственную точке M, т. е. лежащую на луче MB, и проведём радиус mo (ограничимся случаем, когда точка M лежит внутри угла ABC, но не принадлежит

его биссектрисе). Если теперь построим $MO \parallel mo$, то точка O будет центром искомого круга. Действительно, проведя к стороне AB перпендикуляры ON и on, мы получим подобные треугольники MBO и mBo, NBO и nBo, из которых будем иметь:

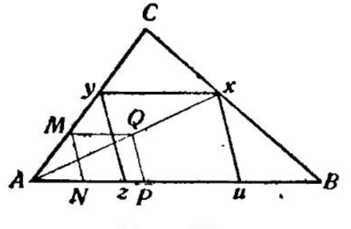
$$MO : mo = BO : Bo; \quad NO : no = BO : Bo,$$

откуда

$$MO : mo = NO : no.$$

Но $mo = no$; следовательно, $MO = NO$, т. е. окружность, описанная радиусом OM, с центром O, касается стороны AB; а так как её центр лежит на биссектрисе угла, то она касается и стороны BC.

Если за сходственную точку возьмём другую точку m_1 пересечения луча MB с окружностью o, то найдём другой центр O_1 искомого круга. Следовательно, задача допускает два решения.



Черт. 30.

Задача 3. *В данный треугольник ABC вписать ромб с данным острым углом так, чтобы одна из его сторон лежала на основании AB треугольника ABC, а две его вершины — на боковых сторонах AC и BC* (черт. 30).

Отбросим на время требование, чтобы одна из вершин ромба лежала на стороне BC. Тогда можно построить бесчисленное множество ромбов, удовлетворяющих остальным условиям задачи. Построим один из них.

Берём на стороне AC произвольную точку M. Строим угол с вершиной в этой точке, равный данному, одна сторона которого была бы параллельна основанию AB, а другая пересекала основание AB в некоторой точке N. На стороне AB от точки N откладываем отрезок NP, равный MN, и строим ромб со сторонами MN и NP.

Пусть Q его четвёртая вершина. Далее, выбираем вершину A за центр подобия и строим ромб, подобный ромбу $MNPQ$, выбирая коэффициент подобия так, чтобы вершина нового ромба, соответствующая вершине Q, оказалась на стороне BC. Для этой цели продолжаем прямую AQ до пересечения со стороной BC в некоторой точке x. Эта точка x будет одной из вершин искомого ромба.

Проводя из этой точки прямые, параллельные сторонам ромба $MNPQ$, получаем искомый ромб $xyzu$.

Предоставляем самим учащимся решить методом подобия следующие задачи:

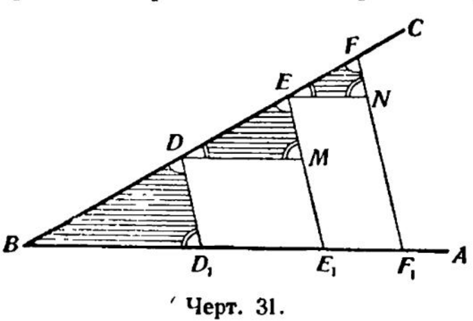
1. Построить треугольник, зная два его угла и радиус описанной окружности.

2. Построить треугольник, зная отношение высоты к основанию, угол при вершине и медиану боковой стороны.

3. Дан $\angle AOB$ и внутри него точка C. Найти на стороне OB точку M, равно отстоящую от OA и от точки C.

V. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ОТРЕЗКАХ.

39(182). Теорема. ***Стороны угла*** (ABC), ***пересекаемые рядом параллельных прямых*** (DD_1, EE_1,



Черт. 31.

FF_1, ...), ***рассекаются ими на пропорциональные части*** (черт. 31).

Требуется доказать, что

$$\frac{BD}{BD_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EF}{E_1F_1} \text{ и т. д.,}$$

или

$$BD : DE = BD_1 : D_1E_1;$$

$$DE : EF = D_1E_1 : E_1F_1 \text{ и т. д.}$$

Проводя вспомогательные прямые DM, EN и т. д., параллельные BA, мы получим треугольники BDD_1, DEM, EFN и т. д., которые все подобны между собой, так как углы у них соответственно равны (вследствие параллельности прямых). Из их подобия следует:

$$\frac{BD}{BD_1} = \frac{DE}{DM} = \frac{EF}{EN} \text{ и т. д.}$$

Заменив в этом ряду равных отношений отрезок DM на D_1E_1, отрезок EN на E_1F_1 и т. д. (противоположные стороны параллелограммов равны), мы получим то, что требовалось доказать.

40(183). Теорема. ***Две параллельные прямые*** (MN, M_1N_1, черт. 32), ***пересекаемые рядом прямых*** (OA, OB, OC, ...), ***исходящих из одной и той же точки*** (O), ***рассекаются ими на пропорциональные части.***

Требуется доказать, что отрезки AB, BC, CD, ... прямой MN пропорциональны отрезкам A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, ... прямой M_1N_1.

Черт. 32.

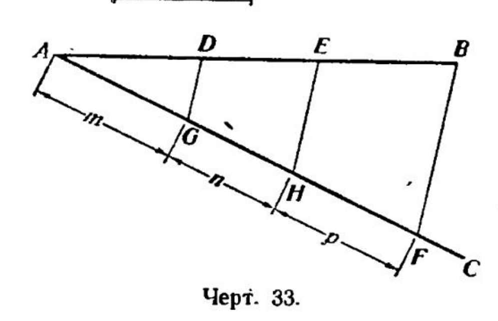
Из подобия треугольников OAB и OA_1B_1 [§ 16(159)] и треугольников OBC и OB_1C_1 выводим:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BO}{B_1O} \text{ и } \frac{BO}{B_1O} = \frac{BC}{B_1C_1},$$

откуда

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Подобным же образом доказывается пропорциональность и прочих отрезков.

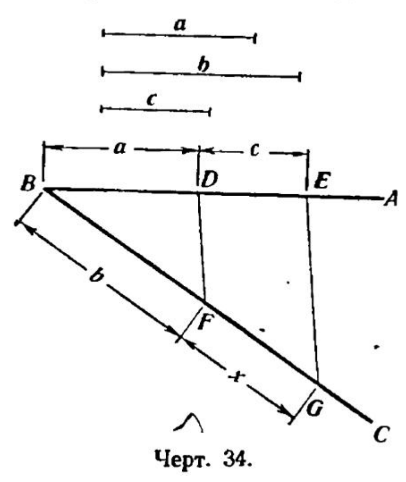


Черт. 33.

41(184). Задача. *Разделить отрезок прямой AB* (черт. 33) *на три части в отношении $m : n : p$, где m, n и p — данные отрезки или данные числа.*

Проведя луч AC под произвольным углом к AB, отложим на нём от точки A отрезки, равные отрезкам m, n и p. Точку F — конец отрезка p, соединяем с B прямой BF и через концы G и H отложенных отрезков проводим прямые GD и HE, параллельные BF. Тогда отрезок AB разделится в точках D и E на части в отношении $m : n : p$.

Если m, n и p означают какие-нибудь числа, например 2, 5, 3, то построение выполняется так же, с той лишь разницей, что на AC откладываются отрезки, равные 2, 5 и 3 произвольным единицам длины.



Черт. 34.

Конечно, указанное построение применимо к делению отрезка не только на три части, но на какое угодно иное число частей.

42(185). Задача. *К трем данным отрезкам a, b и c найти четвёртый пропорциональный* (черт. 34), т. е. найти такой отрезок x, который удовлетворял бы пропорции:

$$a : b = c : x.$$

На сторонах произвольного угла ABC откладываем отрезки: $BD = a$, $BF = b$, $DE = c$. Проведя затем через D и F прямую, построим $EG \parallel DF$. Отрезок FG будет искомый.

Свойство биссектрисы угла треугольника.

43(186). Теорема. ***Биссектриса*** (BD, черт. 35) ***любого угла треугольника*** (ABC) ***делит противоположную сторону на части*** (AD и DC), ***пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.***

Требуется доказать, что если $\angle ABD = \angle DBC$, то $AD : DC = AB : BC$.

Проведём $CE \parallel BD$ до пересечения в точке E с продолжением стороны AB. Тогда, согласно теореме § 39 (182), мы будем иметь пропорцию:

$$AD : DC = AB : BE.$$

Чтобы от этой пропорции перейти к той, которую требуется доказать, достаточно обнаружить, что $BE = BC$, т. е. что $\triangle BCE$ равнобедренный. В треугольнике этом $\angle E = \angle ABD$ (как углы соответственные при параллель-

ных прямых) и $\angle BCE = \angle DBC$ (как углы накрест лежащие при тех же параллельных прямых).

Но $\angle ABD = \angle DBC$, по условию; значит, $\angle E = \angle BCE$, а потому равны и стороны BC и BE, лежащие против равных углов. Теперь, заменив в написанной выше пропорции BE на BC, получим ту пропорцию, которую требуется доказать.

Численный пример. Пусть $AB = 10$; $BC = 7$ и $AC = 6$. Тогда, обозначив AD буквой x, можем написать пропорцию:

$$x : (6 - x) = 10 : 7,$$

Черт. 35.

откуда найдём:

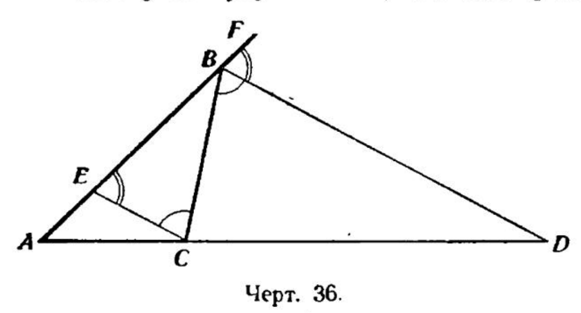
$$7x = 60 - 10x;\ 7x + 10x = 60;\ 17x = 60;$$

$$x = \frac{60}{17} = 3\frac{9}{17}.$$

Следовательно,

$$DC = 6 - x = 6 - 3\frac{9}{17} = 2\frac{8}{17}.$$

44(187). Теорема (выражающая свойство биссектрисы внешнего угла треугольника). ***Биссектриса*** (BD,



Черт. 36.

черт. 36) ***внешнего угла*** (CBF) ***треугольника*** (ABC) ***пересекает продолжение противоположной стороны*** (AC) ***в такой точке*** (D), ***расстояния которой*** (DA и DC) ***до концов этой стороны пропор-***

циональны прилежащим сторонам треугольника (AB и BC). Требуется доказать, что если $\angle CBD = \angle FBD$, то $DA : DC = AB : BC$.

Проведя $CE \parallel BD$, получим пропорцию:

$$DA : DC = AB : BE.$$

Так как $\angle BEC = \angle FBD$ (как соответственные), а $\angle BCE = \angle CBD$ (как накрест лежащие при параллельных прямых) и углы FBD и CBD равны по условию, то $\angle BEC = \angle BCE$; значит, $\triangle BCE$ равнобедренный, т. е. $BE = BC$. Подставив в пропорцию вместо BE равный отрезок BC, получим ту пропорцию, которую требовалось доказать:

$$DA : DC = AB : BC.$$

Примечание. Особый случай представляет биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, которая параллельна основанию.

VI. МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА И НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ ФИГУР.

45(188). Теорема. ***В прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная величина между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит гипотенузу, а каждый катет есть средняя пропорциональная между гипотенузой и прилежащим к этому катету отрезком гипотенузы.***

Пусть AD (черт. 37) есть перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла A на гипотенузу BC. Требуется доказать следующие три пропорции:

$$1)\ \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}; \quad 2)\ \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}; \quad 3)\ \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}.$$

Первую пропорцию мы докажем из подобия треугольников ABD и ADC. Эти треугольники подобны, потому что

$$\angle 1 = \angle 4 \text{ и } \angle 2 = \angle 3,$$

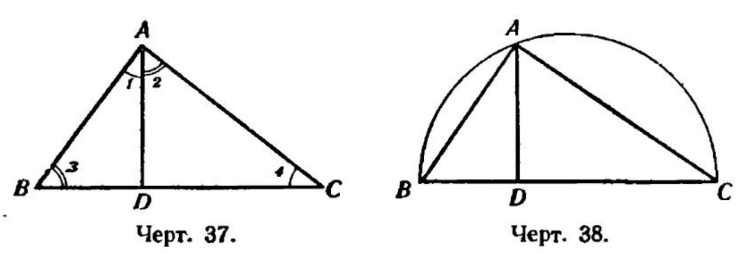
вследствие перпендикулярности их сторон. Возьмём в $\triangle ABD$ те стороны BD и AD, которые составляют пер-

вое отношение доказываемой пропорции; сходственными сторонами в $\triangle ADC$ будут AD и DC[1]), поэтому

$$BD : AD = AD : DC.$$

Вторую пропорцию докажем из подобия треугольников ABC и ABD. Эти треугольники подобны, потому что они прямоугольные и острый угол B у них общий. В $\triangle ABC$ возьмём те стороны BC и AB, которые составляют первое отношение доказываемой пропорции; сходственными сторонами в $\triangle ABD$ будут AB и BD; поэтому

$$BC : AB = AB : BD.$$



Черт. 37. Черт. 38.

Третью пропорцию докажем из подобия треугольников ABC и ADC. Эти треугольники подобны, потому что они оба прямоугольные и имеют общий острый угол C. В $\triangle ABC$ возьмём стороны BC и AC; сходственными сторонами в $\triangle ADC$ будут AC и DC; поэтому

$$BC : AC = AC : DC.$$

46(189). Следствие. **Пусть** A (черт. 38) есть произвольная точка окружности, описанной на диаметре BC. Соединив концы диаметра с этой точкой, мы получим прямоугольный $\triangle ABC$, у которого гипотенуза есть диаметр, а катеты суть хорды. Применяя доказанную выше теорему к этому треугольнику, приходим к следующему заключению:

---

[1]) Чтобы безошибочно определить, какие стороны взятых треугольников сходственны между собой, полезно держаться такого пути:

1) указать углы, против которых лежат взятые стороны одного треугольника;

2) найти равные им углы в другом треугольнике;

3) взять противолежащие им стороны.

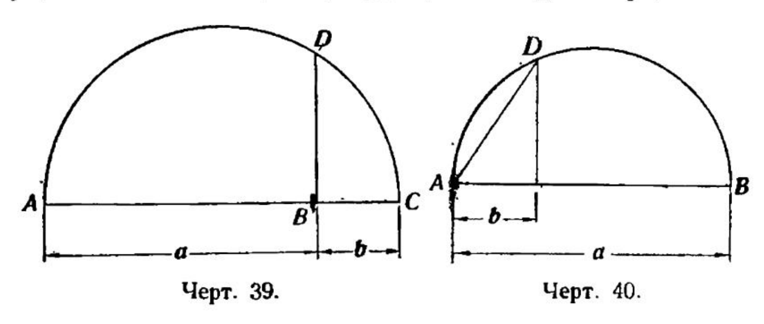
Например, для треугольников ABD и ADC рассуждаем так: в треугольнике ABD стороны BD и AD лежат против углов *1* и *3*; в треугольнике ADC этим углам равны углы *4* и *2*; против них лежат стороны AD и DC. Значит, стороны AD и DC сходственны со сторонами BD и AD.

Перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки окружности на диаметр, есть средняя пропорциональная величина между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит диаметр, а хорда, соединяющая эту точку с концом диаметра, есть средняя пропорциональная между диаметром и прилежащим к хорде отрезком диаметра.

47(190). Задача. *Построить отрезок, средний пропорциональный между двумя отрезками a и b.*

Задачу эту можно решить двояким путём:

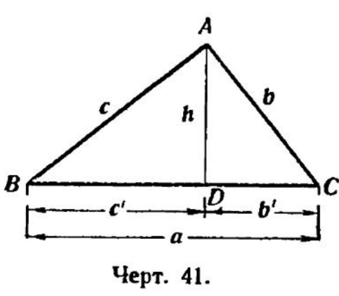
1) На произвольной прямой (черт. 39) откладываем отрезки $AB = a$ и $BC = b$; на AC, как на диаметре, описы-



Черт. 39. Черт. 40.

ваем полуокружность; из B восставляем до пересечения с окружностью перпендикуляр BD. Этот перпендикуляр и есть искомая средняя пропорциональная между AB и BC.

2) На произвольной прямой (черт. 40) откладываем от точки A отрезки a и b. На большем из этих отрезков описываем полуокружность. Проведя из конца меньшего отрезка перпендикуляр к AB до пересечения его с окружностью в точке D, соединяем A с D. Хорда AD есть средняя пропорциональная между a и b.



Черт. 41.

48(191). Теорема Пифагора. Доказанные выше теоремы позволяют обнаружить замечательное соотношение между сторонами любого прямоугольного треугольника. Это соотношение было впервые замечено греческим геометром Пифагором (VI в. до н. э.) и носит поэтому его имя — **теорема Пифагора**.

Если стороны прямоугольного треугольника измерены одной и той же единицей, то квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

Пусть ABC (черт. 41) есть прямоугольный треугольник, AD — перпендикуляр, опущенный на гипотенузу из вершины прямого угла. Положим, что стороны и отрезки гипотенузы измерены одной и той же единицей, причём получились числа a, b, c, c' и b' (принято длины сторон треугольника обозначать малыми буквами, соответствующими большим буквам, которыми обозначены противолежащие углы). Применяя теорему § 45 (188), можем написать пропорции:

$$a : c = c : c' \text{ и } a : b = b : b',$$

откуда

$$ac' = c^2 \text{ и } ab' = b^2.$$

Сложив почленно эти два равенства, найдём:

$$ac' + ab' = c^2 + b^2, \text{ или } a(c' + b') = c^2 + b^2.$$

Но $c' + b' = a$, следовательно,

$$a^2 = c^2 + b^2.$$

Эту теорему обыкновенно выражают сокращённо так: ***квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.***

Пример. Положим, что катеты, измеренные какой-нибудь линейной единицей, выражаются числами 3 и 4; тогда гипотенуза в той же единице выразится числом x, удовлетворяющим уравнению:

$$x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25, \text{ откуда } x = \sqrt{25} = 5.$$

Замечание. Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 называется часто **египетским** треугольником, так как он был известен ещё древним египтянам. Так, их землемеры для построения прямого угла на земной поверхности пользовались таким приёмом: бечёвку посредством узлов они разделяли на 12 равных частей; затем, связав концы, натягивали её на земле (посредством кольев) в виде треугольника со сторонами в 3, 4 и 5 делений, тог-

да угол между сторонами, равными 3 и 4, оказывался прямым[1]).

Теорема Пифагора имеет ещё другую формулировку, именно ту, которая была для неё получена самим Пифагором. С этой формулировкой мы познакомимся позднее [§ 114(257)].

49(192). Следствие. *Квадраты катетов относятся между собой, как прилежащие отрезки гипотенузы.* Действительно, из уравнений предыдущего параграфа находим:

$$c^2 : b^2 = ac' : ab' = c' : b'.$$

50(193). Замечание 1. К трем равенствам, которые мы вывели выше:

$$1)\ ac' = c^2;\ 2)\ ab' = b^2 \text{ и } 3)\ a^2 = b^2 + c^2,$$

можно присоединить еще следующие два:

$$4)\ b' + c' = a \text{ и } 5)\ h^2 = b'c'$$

(если буквой h обозначим длину высоты AD). Из этих равенств третье, как мы видели, составляет следствие первых двух и четвёртого, так что из пяти равенств только четыре независимы; вследствие этого можно по данным двум из шести чисел находить остальные четыре.

Для примера положим, что нам даны отрезки гипотенузы $b' = 5$ *м* и $c' = 7$ *м*; тогда

$$a = b' + c' = 12;\ c = \sqrt{ac'} = \sqrt{12 \cdot 7} = \sqrt{84} = 9{,}165\ \ldots$$

$$b = \sqrt{ab'} = \sqrt{12 \cdot 5} = \sqrt{60} = 7{,}746\ \ldots$$

$$h = \sqrt{b'c'} = \sqrt{5 \cdot 7} = \sqrt{35} = 5{,}916\ \ldots\ .$$

Замечание 2. В последующих теоремах мы будем сокращенно говорить: «квадрат стороны» вместо «квадрат числа, выражающего длину стороны», или «произведение отрезков» вместо «произведение чисел, выражающих длины отрезков». При этом будем подразумевать, что отрезки измерены одной и той же единицей.

---

[1]) Прямоугольные треугольники, у которых стороны измеряются целыми числами, носят название пифагоровых треугольников. Можно доказать, что катеты x и y и гипотенуза z таких треугольников выражаются следующими формулами:

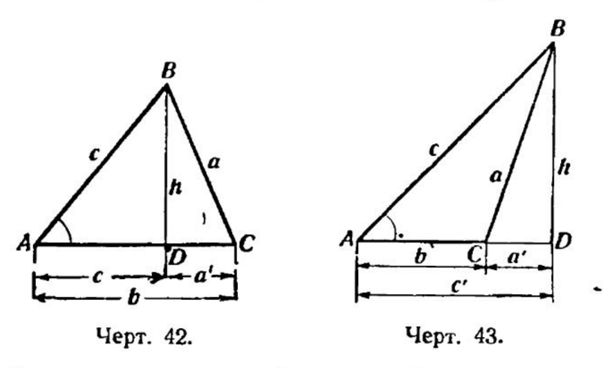
$$x = 2ab,\ y = a^2 - b^2,\ z = a^2 + b^2,$$

где a и b — произвольные целые числа при условии, что $a > b$.

51(194). Теорема. ***Во всяком треугольнике квадрат стороны, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения какой-нибудь из этих сторон на отрезок её от вершины острого угла до высоты.***

Пусть BC — сторона $\triangle ABC$ (черт. 42 и 43), лежащая против острого угла A, и BD — высота, опущенная на какую-либо из остальных сторон, например на AC (или на продолжение AC). Требуется доказать, что

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD,$$



Черт. 42. Черт. 43.

или, обозначая длины линий малыми буквами, как указано на чертеже, надо доказать равенство:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'.$$

Из прямоугольного $\triangle BDC$ находим:

$$a^2 = h^2 + (a')^2. \qquad (1)$$

Определим каждый из квадратов h^2 и $(a')^2$. Из прямоугольного $\triangle BAD$ находим:

$$h^2 = c^2 - (c')^2. \qquad (2)$$

С другой стороны, $a' = b - c'$ (черт. 42) или $a' = c' - b$ (черт. 43). В обоих случаях для $(a')^2$ получаем одно и то же выражение:

$$(a')^2 = (b - c')^2 = b^2 - 2bc' + (c')^2;$$
$$(a')^2 = (c' - b)^2 = (c')^2 - 2bc' + b^2. \qquad (3)$$

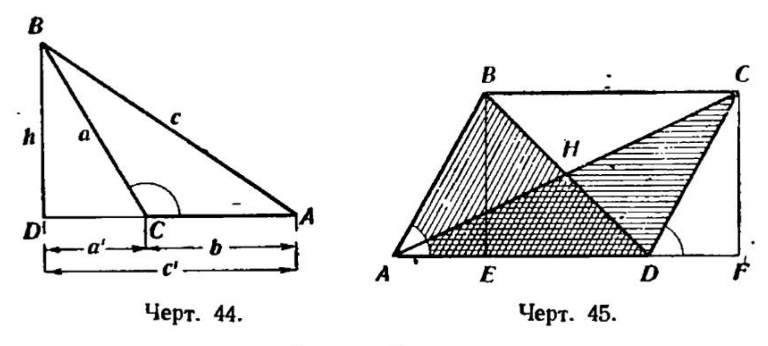
Теперь равенство (1) можно переписать так:

$$a^2 = c^2 - (c')^2 + b^2 - 2bc' + (c')^2 = c^2 + b^2 - 2bc'.$$

52(195). Теорема. ***В тупоугольном треугольнике квадрат стороны, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон, сложенной с удвоенным произведением какой-нибудь из этих сторон на отрезок её продолжения от вершины тупого угла до высоты.***

Пусть AB — сторона $\triangle ABC$ (черт. 44), лежащая против тупого угла C, и BD — высота, опущенная на продолжение какой-либо из остальных сторон, например на AC; требуется доказать, что

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot CD,$$



Черт. 44. Черт. 45.

или, применяя сокращённые обозначения, согласно указанию на чертеже:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ba'.$$

Из треугольников ABD и CBD находим:

$$c^2 = h^2 + (c')^2 = a^2 - (a')^2 + (a' + b)^2 =$$
$$= a^2 - (a')^2 + (a')^2 + 2ba' + b^2 = a^2 + b^2 + 2ba',$$

что и требовалось доказать.

53(196). **Следствие.** Из трёх последних теорем выводим, что *квадрат стороны треугольника равен, меньше или больше суммы квадратов двух других сторон, смотря по тому, будет ли противолежащий угол прямой, острый или тупой*; отсюда следует обратное предложение.

Угол треугольника окажется прямым, острым или тупым, смотря по тому, будет ли квадрат противолежащей этому углу стороны равен, меньше или больше суммы квадратов двух других сторон.

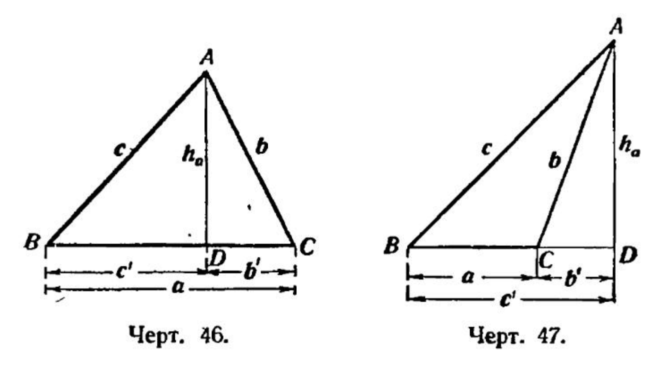
54(197). Теорема. ***Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов сторон*** (черт. 45).

Из вершин B и C параллелограмма $ABCD$ опустим на основание AD перпендикуляры BE и CF. Тогда из треугольников ABD и ACD находим:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AE;$$
$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot DF.$$

Прямоугольные треугольники ABE и DCF равны, так как они имеют по равной гипотенузе и равному острому углу; поэтому $AE = DF$. Заметив это, сложим почленно два выведенные выше равенства; тогда $2AD \cdot AE$ и $2AD \cdot DF$ взаимно уничтожатся, и мы получим:

$$BD^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2 + AD^2 + CD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$



Черт. 46. Черт. 47.

55(198). Вычисление высот треугольника по его сторонам. Определим высоту h_a треугольника ABC, опущенную на сторону $BC = a$ (черт. 46 и 47).

Обозначим отрезки стороны a (продолженной в случае тупого угла C, черт. 47) таким образом: отрезок BD, прилежащий к стороне c, через c', а отрезок DC, прилежащий к стороне b, через b'. Пользуясь теоремой о квадрате стороны треугольника, лежащей против острого угла [§ 51(194)], можем написать:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac'.$$

Из этого уравнения находим отрезок c':

$$c' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

После этого из треугольника ABD определяем высоту, как катет:

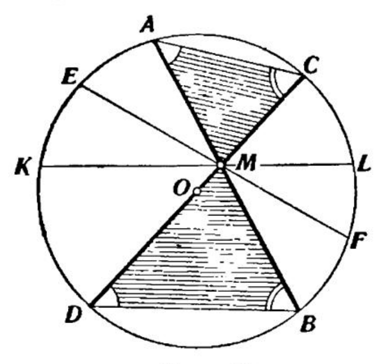
$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2}.$$

Таким же путем можно определить в зависимости от сторон треугольника длины h_b и h_c высот, опущенных на стороны b и c.

VII. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ЛИНИИ В КРУГЕ.

56(199). Некоторые пропорциональные линии в круге мы указали ранее [§ 46 (189)]; теперь укажем ещё другие.

Теорема. ***Если через точку*** (M, черт. 48), ***взятую внутри круга, проведены какая-нибудь хорда*** (AB) ***и диаметр*** (CD), ***то произведение отрезков хорды*** ($AM \cdot MB$) ***равно произведению отрезков диаметра*** ($MD \cdot MC$).



Черт. 48.

Проведя две вспомогательные хорды AC и BD, мы получим два треугольника AMC и MBD (покрытые на чертеже штрихами), которые подобны, так как у них углы A и D равны, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу BC, и углы C и B равны, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AD. Из подобия треугольников выводим:

$$AM : MD = MC : MB,$$

откуда

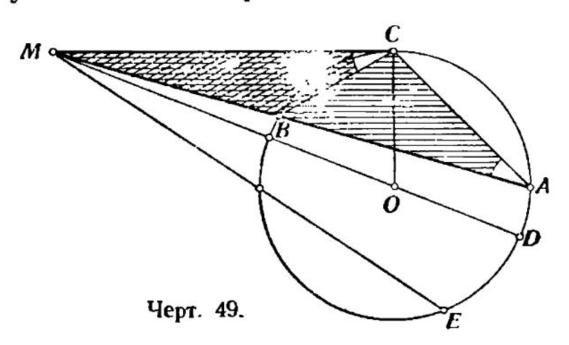
$$AM \cdot MB = MD \cdot MC.$$

57(200). Следствие. *Если через точку* (M, черт. 48), *взятую внутри круга, проведено сколько угодно хорд* (AB, EF, KL, ...), *то произведение отрезков каждой хорды есть число постоянное для всех хорд*, так как для каждой хорды это произведение равно произведению отрезков диаметра CD, проходящего через взятую точку M.

58(201). Теорема. ***Если из точки*** (M, черт. 49), ***взятой вне круга, проведены к нему какая-нибудь***

секущая (MA) ***и касательная*** (MC), ***то произведение секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной*** (предполагается, что секущая ограничена второй точкой пересечения, а касательная — точкой касания).

Проведём вспомогательные хорды AC и BC; тогда получим два треугольника MAC и MBC (покрытые на чертеже штрихами), которые подобны, потому что у них угол M общий и углы MCB и CAB равны, так как каждый из них



Черт. 49.

измеряется половиной дуги BC. Возьмём в $\triangle MAC$ стороны MA и MC; сходственными сторонами в $\triangle MBC$ будут MC и MB; поэтому

$$MA : MC = MC : MB,$$

откуда

$$MA \cdot MB = MC^2.$$

59(202). Следствие. *Если из точки* (M, черт. 49), *взятой вне круга, проведено к нему сколько угодно секущих* (MA, MD, ME, ...), *то произведение каждой секущей на её внешнюю часть есть число постоянное для всех секущих*, так как для каждой секущей это произведение равно квадрату касательной (MC^2), проведённой из точки M.

VIII. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА.

60(203). Определения. Пусть α будет какой-нибудь острый угол (черт. 50). Возьмём на одной из его сторон произвольную точку M и опустим из неё перпендикуляр MN на другую сторону угла. Тогда мы получим прямоугольный

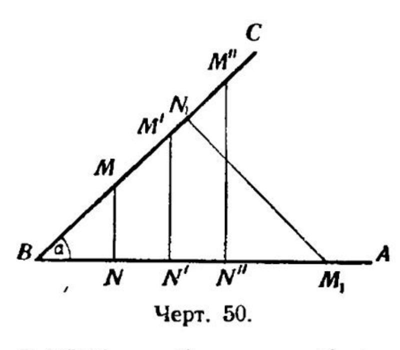
треугольник BMN. Возьмём отношения сторон этого треугольника попарно, а именно:

$\frac{MN}{BM}$, т. е. отношение катета, противолежащего углу α, к гипотенузе,

$\frac{BN}{BM}$, т. е. отношение катета, прилежащего к углу α, к гипотенузе,

$\frac{MN}{BN}$, т. е. отношение катета, противолежащего углу α, к катету прилежащему; и им обратные отношения:

$$\frac{BM}{MN}, \quad \frac{BM}{BN}, \quad \frac{BN}{MN}.$$



Черт. 50.

Величина каждого из этих 6 отношений не зависит от положения точки M на стороне BC. Действительно, если мы вместо точки M возьмём другие точки M', M'', ... и опустим перпендикуляры $M'N'$, $M''N''$, ..., то образовавшиеся треугольники $BM'N'$, $BM''N''$, ... будут подобны треугольнику BMN, так как соответственные углы их одинаковы. Так как в подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны, то

$$\frac{MN}{BN} = \frac{M'N'}{BN'} = \frac{M''N''}{BN''} = \ldots,$$

$$\frac{BN}{MN} = \frac{BN'}{M'N'} = \frac{BN''}{M''N''} = \ldots.$$

Величина каждого из взятых нами отношений не зависит также и от того, на какой стороне угла берётся точка M. Если, например, мы возьмём точку M_1 (тот же чертёж) на стороне BA и проведём $M_1N_1 \perp BC$, то треугольник BM_1N_1 также будет подобен $\triangle BMN$, так как у них имеются по 2 равных угла, именно по прямому углу и по острому α, который входит и в тот и в другой треугольник; поэтому:

$$\frac{M_1N_1}{BM_1} = \frac{MN}{BM} = \ldots.$$

Таким образом, взятые нами отношения не меняются при изменении положения точки M на той или другой стороне

угла α, но, конечно, они изменяются при изменении величины самого угла.

При этом каждому размеру угла соответствует вполне определённое значение каждого из этих отношений.

Поэтому мы можем сказать, что каждое отношение есть **функция** только угла и характеризует собой величину этого угла.

Все указанные отношения принято называть **тригонометрическими функциями угла**. Чаще других из 6 отношений берутся следующие 4, которым дали особые названия и особые обозначения:

отношение катета, противолежащего углу α, к гипотенузе называется **синусом** угла α и обозначается $\sin\alpha$;

отношение катета, прилежащего к углу α, к гипотенузе называется **косинусом** угла α и обозначается $\cos\alpha$;

отношение катета, противолежащего углу α, к катету, прилежащему к нему, называется **тангенсом** угла α и обозначается $\operatorname{tg}\alpha$;

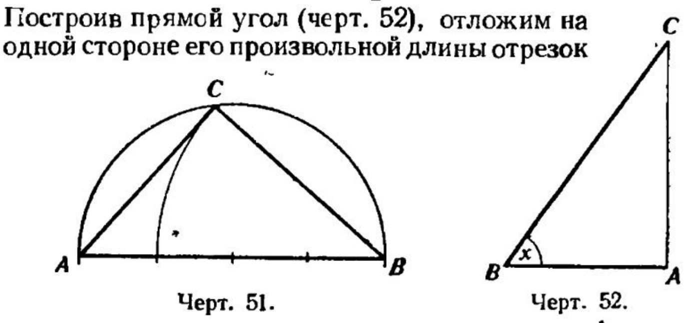
отношение прилежащего катета к противолежащему (т. е. отношение, обратное тому, которое называется тангенсом) называется **котангенсом** угла α и обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$.

Так как каждый из двух катетов меньше гипотенузы, то синус и косинус всякого угла есть число, меньшее единицы, и так как один катет может быть и больше, и меньше другого катета, и равен ему, то тангенс и котангенс могут выражаться числами и бо́льшими 1, и меньшими 1, и равными 1.

61(204). Построение угла по заданной величине одной из его тригонометрических функций. 1) Пусть требуется начертить угол, синус которого равняется $\frac{3}{4}$. Для этого надо построить такой прямоугольный треугольник, у которого отношение одного из катетов к гипотенузе равнялось бы $\frac{3}{4}$, и взять в этом треугольнике тот из острых углов, который противолежит этому катету. Чтобы построить такой треугольник, возьмём какой-нибудь небольшой отрезок и отложим отрезок AB (черт. 51), равный 4 таким отрезкам. На AB опишем полуокружность и радиусом, равным $\frac{3}{4}$ гипотенузы, с центром в точке B опишем дугу до пересечения её в точке C с полуокружностью. Соединив C с A и с B, мы получим прямоугольный треугольник, угол которого A и будет иметь синус $\frac{3}{4}$.

2) Дано уравнение: $\cos x = 0{,}7$; построить угол x. Эта задача решается так же, как и 1-я: за гипотенузу возьмём отрезок AB (тот же чертёж), равный 10 каким-нибудь одинаковым частям, а за прилежащий катет AC — отрезок в 7 таких же частей; тогда угол A, прилежащий к этому катету, и будет искомый.

3) Построить угол x, зная, что $\operatorname{tg} x = 1\frac{1}{2}$. Для этого надо построить такой прямоугольный треугольник, у которого один катет был бы в $1\frac{1}{2}$ раза больше другого катета. Построив прямой угол (черт. 52), отложим на одной стороне его произвольной длины отрезок



Черт. 51. Черт. 52.

AB, а на другой стороне – отрезок AC, равный $1\frac{1}{2}AB$. Соединив точки B и C, получим угол B, тангенс которого равен $1\frac{1}{2}$.

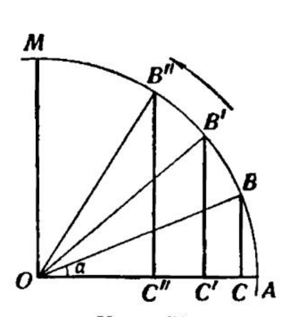
Такое же построение придётся выполнить, когда угол требуется построить по данному котангенсу; только тогда за искомый угол надо взять тот, который прилежит к катету AC.

62(205). Изменение тригонометрических функций при изменении угла от 0° до 90°. Чтобы удобнее проследить изменение синуса и косинуса при изменении величины угла, мы предположим, что при этом изменении длина гипотенузы остаётся постоянной, равной единице длины, а изменяются только катеты. Опишем радиусом OA (черт. 53), равным произвольной единице длины, четверть окружности AM и в ней возьмём какой-нибудь центральный угол $AOB = \alpha$. Опустив из B на радиус OA перпендикуляр BC, мы будем иметь:

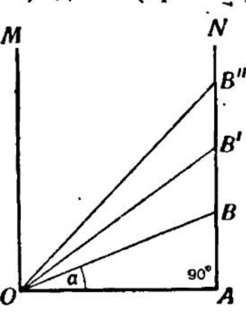
$$\sin\alpha = \frac{BC}{OB} = \frac{BC}{1} = \text{числ. велич. } BC;$$

$$\cos\alpha = \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{1} = \text{числ. велич. } OC.$$

Вообразим теперь, что радиус OB вращается вокруг центра O в сторону, указанную на чертеже стрелкой, начиная от OA и кончая OM. Тогда угол α будет увеличиваться от 0° до 90° (переходя через указанные на чертеже значения AOB, AOB', AOB'' и т. д.): численная величина катета BC, противолежащего углу α, будет увеличиваться от 0 (при $\alpha = 0°$) до 1 (при $\alpha = 90°$); численная величина катета OC, прилежащего к углу α, будет, наоборот, уменьшаться от 1 (при $\alpha = 0°$) до 0 (при $\alpha = 90°$).



Черт. 53.



Черт. 54.

Таким образом, **при возрастании угла от 0° до 90° синус его увеличивается от 0 до 1, а косинус уменьшается от 1 до 0.**

Проследим теперь изменение тангенса. Так как тангенс есть отношение катета, противолежащего углу, к катету прилежащему, то удобнее будет предположить, что при изменении острого угла прилежащий катет остаётся неизменным, равным единице длины, а другой катет изменяется. Возьмем отрезок OA, равный единице длины (чертеж 54), и примем его за неизменный катет треугольника AOB, острый угол которого $AOB = \alpha$ станем изменять.

Согласно определению $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} =$ числ. велич. AB.

Будем теперь перемещать точку B вдоль AN, начиная от A, всё выше и выше через положение B', B'', ...; тогда, как видно из чертежа, угол α и его тангенс будут возрастать, причём, когда подвижная точка B совпадает с A, угол α равен 0°, и тангенс его будет также 0. Когда точка B поднимается по прямой AN всё выше и выше, угол α возрастает, стремясь к углу $AOM = 90°$, и численная величина тангенса тоже возрастает, причём она, очевидно,

может сделаться больше какого угодно большого числа (возрастает неограниченно). Значит, **при возрастании угла от 0° до 90° тангенс его увеличивается от 0 неограниченно.**

Заметим, что вместо того чтобы говорить о какой-нибудь изменяющейся величине, что она возрастает неограниченно, говорят иначе, что она возрастает до бесконечности, причём слово «бесконечность» выражают письменно знаком ∞; так что изменение тангенса можно выразить так: при возрастании угла от 0° до 90° тангенс его возрастает от 0 до ∞.

Из определения котангенса [§ 60 (203)] следует, что котангенс есть величина, обратная тангенсу ($\operatorname{ctg} \alpha = 1 : \operatorname{tg} \alpha$), а потому, когда $\operatorname{tg} \alpha$ возрастает от 0 до ∞, то $\operatorname{ctg} \alpha$ убывает от ∞ до 0.

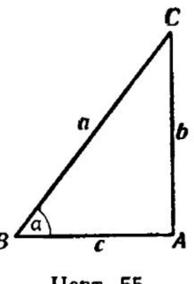
63(206). Таблица тригонометрических функций. На странице 120 помещена таблица, в которой выписаны тригонометрические функции (с точностью до 5-го десятичного знака) для всех углов, выражаемых целым числом градусов, от 1° до 90°. Таблица эта расположена так: в первой слева колонке (над которой напечатано «градусы») помещены числа градусов: 1°, 2°, 3°, ... до 45°; во второй колонке (над которой напечатано «синусы») выставлены величины синусов, соответствующие углам, указанным в первой колонке; в 3-й колонке помещены величины косинусов, затем тангенсов и далее котангенсов. В последней 6-й колонке помещены снова числа градусов, именно: 90°, 89°, 88°, 87° и т. д. до 45°. Сделано это (ради экономии места) на том основании, что, как следует из определения синуса и косинуса [§ 60 (203)], $\sin \alpha = \cos (90° - \alpha)$, $\cos \alpha = \sin (90° - \alpha)$ и т. д.; значит, $\sin 1° = \cos 89°$, $\sin 2° = \cos 88°$ и т. д. Поэтому внизу той колонки, над которой сверху стоит надпись «синусы», напечатано «косинусы»; внизу той колонки (3-й слева), над которой помечено «косинусы», стоит «синусы» и т. п. Таким образом, для углов от 1° до 45° надо читать числа градусов в 1-й колонке слева, а названия тригонометрических функций — над колонками, для углов же от 45° до 89° надо числа градусов брать в последней колонке справа, а названия функций читать внизу колонки. Например, из таблицы находим: $\operatorname{tg} 35° = 0{,}70021$, $\cos 53° = 0{,}60182$, $\operatorname{tg} 72° = 3{,}07768$ и т. п.

При помощи такой таблицы мы можем не только находить тригонометрические функции данного угла, но и, наоборот, по данной функции неизвестного угла можем находить (приближённо) этот угол. Пусть, например, требуе-

тся найти угол x, зная, что $\sin x = 0{,}61523$. Ищем в колонках синусов число, возможно близкое к 0,61523. Такое число оказывается 0,61566, означающее $\sin 38^\circ$. Так как $0{,}61523 < < 0{,}61566$, то $x < 38^\circ$. Но, с другой стороны, $0{,}61523 > > 0{,}60182$ (последнее число в таблице стоит над числом 0,61566 и означает $\sin 37^\circ$); поэтому $x > 37^\circ$. Мы нашли, таким образом, два угла: 37° и 38°, между которыми заключается угол x. Значит, если мы вместо x примем угол в 37° или угол в 38°, то в первом случае найдём приближённое значение с недостатком, а во втором случае — с избытком, в том и другом случае с точностью до 1°. Предпочтительно брать тот из этих двух углов, синус которого менее разнится от данного (в нашем примере лучше взять 38°).

Пусть ещё требуется найти угол x по уравнению: $\operatorname{ctg} x = 0{,}7826$. В колонках котангенсов находим: $0{,}78129 = \operatorname{ctg} 52^\circ$; $0{,}80978 = \operatorname{ctg} 51^\circ$.

Так как $0{,}80978 > 0{,}7826 > 0{,}78129$, то $51^\circ < x < 52^\circ$, причём x ближе к 52°, и потому лучше принять $x = 52^\circ$ (с точностью до 1°).



Черт. 55.

64(207). Зависимость между сторонами и углами прямоугольного треугольника. 1) Из прямоугольного треугольника ABC находим (черт. 55):

$$\frac{b}{a} = \sin B; \quad \frac{c}{a} = \cos B,$$

откуда

$$b = a \sin B; \quad c = a \cos B.$$

Так как $B = 90^\circ - C$, то $\sin B = \cos C$ и $\cos B = = \sin C$; значит, предыдущие равенства можно дополнить так:

$$b = a \sin B = a \cos C;$$

$$c = a \cos B = a \sin C.$$

Таким образом, **катет прямоугольного треугольника равен его гипотенузе, умноженной на синус угла, противолежащего этому катету, или на косинус угла, прилежащего к нему.**

2) Из того же треугольника находим:

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tg} B; \quad \frac{c}{b} = \operatorname{ctg} B,$$

откуда

$$b = c\,\mathrm{tg}\,B; \quad c = b\,\mathrm{ctg}\,B.$$

Но $\mathrm{tg}\,B = \mathrm{ctg}\,(90^\circ - B) = \mathrm{ctg}\,C$ и $\mathrm{ctg}\,B = \mathrm{tg}\,(90^\circ - B) = \mathrm{tg}\,C$; поэтому можно написать:

$$b = c\,\mathrm{tg}\,B = c\,\mathrm{ctg}\,C; \quad c = b\,\mathrm{ctg}\,B = b\,\mathrm{tg}\,C,$$

т. е. катет равен другому катету, умноженному на тангенс угла, противолежащего первому катету, или на котангенс угла, прилежащего к нему.

65(208). Решение прямоугольных треугольников. Указанные зависимости позволяют нам **решать** прямоугольный треугольник, т. е. по некоторым данным элементам его вычислять остальные. Приведём пример.

Пример. В прямоугольном треугольнике известны: гипотенуза $a = 4{,}5$ и угол $C = 42^\circ$. Найти катеты и угол B. $b = a\cos C = 4{,}5 \cdot \cos 42^\circ$; $c = a\sin C = 4{,}5 \cdot \sin 42^\circ$. Из таблицы находим (ограничиваясь 2 десятичными знаками):

$$\sin 42^\circ = 0{,}67, \ \cos 42^\circ = 0{,}74.$$

Значит: $b = 4{,}5 \cdot 0{,}74 = 3{,}3$; $c = 4{,}5 \cdot 0{,}67 = 3{,}0$; $B = 90^\circ - C = 48^\circ$.

IX. ПОНЯТИЕ О ПРИЛОЖЕНИИ АЛГЕБРЫ К ГЕОМЕТРИИ.

66(209). Задача. *Данный отрезок разделить в среднем и крайнем отношении.*

Эту задачу надо понимать так: разделить данный отрезок на такие две части, чтобы бо́льшая из них была средней пропорциональной между всей линией и меньшей её частью.

Задача будет решена, если мы найдём одну из двух частей, на которые требуется разделить данный отрезок. Будем находить бо́льшую часть, т. е. ту, которая должна быть средней пропорциональной между всем отрезком и меньшей его частью. Предположим сначала, что речь идёт не о построении этой части, а только о вычислении её длины. Тогда задача решается алгебраически так: если длину данного отрезка обозначим a, а длину бо́льшей части x, то длина другой части будет рав-

на $a-x$ и, согласно требованию задачи, мы будем иметь пропорцию:

$$a:x=x:(a-x),$$

откуда

$$x^2=a(a-x), \text{ или } x^2+ax-a^2=0.$$

Решив это квадратное уравнение, находим:

$$x_1=-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}; \quad x_2=-\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}.$$

Отбросив второе решение как отрицательное, возьмём только первое положительное решение, которое удобнее представить так:

$$x_1=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}-\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}-\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}-$$

$$-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\sqrt{5}-\frac{a}{2}=\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}=a\cdot 0{,}61803\ \ldots.$$

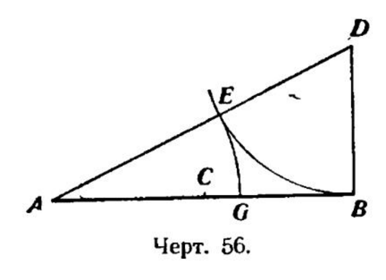
Таким образом, задача всегда возможна и имеет только одно решение.

Если бы нам удалось построить такой отрезок, длина которого численно выражается найденной выше формулой, то, нанеся этот отрезок на данный отрезок, мы разделили бы его в среднем и крайнем отношении. Итак, вопрос сводится к построению найденной формулы. Построить эту формулу всего удобнее, если мы её возьмём в том виде, в каком она была до упрощения, т. е. возьмём:

$$x_1=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}-\frac{a}{2}.$$

Рассматривая отдельно выражение $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$, мы замечаем, что оно представляет собой длину гипотенузы такого прямоугольного треугольника, у которого один катет равен a, а другой $\frac{a}{2}$. Построив такой треугольник, мы найдём отрезок, выражаемый формулой $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$. Чтобы получить затем отрезок x_1, достаточно из гипотенузы построенного треугольника вычесть $\frac{a}{2}$. Таким образом, построение можно выполнить так.

Делим (черт. 56) данный отрезок $AB = a$ пополам в точке C. Из конца B восставляем перпендикуляр и откладываем на нём $BD = BC$. Соединив A с D прямой, получим прямоугольный $\triangle ABD$, у которого один катет $AB = a$, а другой катет $BD = \frac{a}{2}$. Следовательно, его гипотенуза AD равна $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$. Чтобы вычесть из гипотенузы длину $\frac{a}{2}$, опишем дугу радиусом $BD = \frac{a}{2}$ с центром в точке D. Тогда отрезок AE будет равен $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$, т. е. будет равен x_1. Отложив AE на AB (от A до G), получим точку G, в которой отрезок AB делится в среднем и крайнем отношении[1]).



Черт. 56.

З а м е ч а н и е. Деление отрезка в среднем и крайнем отношении нужно в геометрии для построения правильного 10-угольника, вписанного в данный круг.

67(210). Алгебраический способ решения геометрических задач. Мы решили предложенную задачу путем п р и л о ж е н и я а л г е б р ы к г е о м е т р и и. Этот прием состоит в следующем: сперва определяют, какой отрезок прямой должно отыскать, чтобы можно было решить задачу. Затем, обозначив длины данных отрезков прямой буквами a, c, d, ..., а искомого — буквой x, составляют из условий задачи и известных теорем уравнение, связывающее длину искомого отрезка прямой с длинами данных, и полученное уравнение решают по правилам алгебры. Найденную формулу исследуют, т. е. определяют, при всяких ли заданиях эта формула даёт возможные решения или только при некоторых и получается ли одно решение или несколько. Затем строят формулу, т. е. находят построением такой отрезок прямой, численная величина которого выражается этой формулой.

---

[1]) Деление отрезка в среднем и крайнем отношении известно под названием золотого сечения.

Таким образом, алгебраический приём решения геометрических задач состоит в общем из следующих четырёх частей: 1) составление уравнения, 2) решение его, 3) исследование полученной формулы и 4) построение её.

Иногда задача приводится к отысканию нескольких отрезков прямой. Тогда, обозначив численные величины их буквами x, y, ..., стремятся составить столько уравнений, сколько неизвестных.

68(211). Построение простейших формул. Укажем простейшие формулы, которые можно построить посредством циркуля и линейки; при этом будем предполагать, что буквы a, b, c, ... означают длины данных отрезков прямой, а x — длину искомого. Не останавливаясь на таких формулах:

$$x = a + b + c,\ x = a - b,\ x = 2a,\ 3a,\ \ldots,$$

построение которых выполняется весьма просто, перейдём к более сложным:

1) Формулы $x = \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \ldots,\ x = \frac{2}{3}a, \ldots$ строятся посредством деления отрезка a на равные части, затем, если нужно, повторением одной части слагаемым 2, 3, ... и так далее раз.

2) Формула $x = \frac{ab}{c}$ выражает четвёртую пропорциональную к отрезкам прямой c, a и b. Действительно, из этого равенства выводим:

$$cx = ab,$$

откуда

$$c : a = b : x.$$

Следовательно, x найдётся способом, указанным нами для построения четвёртой пропорциональной [§ 42(185)].

3) Формула $x = \frac{a^2}{b}$ выражает четвёртую пропорциональную к отрезкам прямой b, a и a, или, как говорят, третью пропорциональную к отрезкам b и a. Действительно, из данного равенства выводим:

$$bx = a^2,$$

откуда

$$b : a = a : x.$$

Следовательно, x найдётся тем же способом, каким отыскивается четвёртая пропорциональная (только отрезок a придется откладывать два раза).

4) Формула $x = \sqrt{ab}$ выражает среднюю пропорциональную между a и b. Действительно, из неё выводим:

$$x^2 = ab,$$

откуда

$$a : x = x : b.$$

Следовательно, x найдётся способом, указанным раньше для построения средней пропорциональной [§ 47(190)].

5) Формула $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ выражает гипотенузу прямоугольного треугольника, у которого катеты суть a и b.

6) Формула $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ представляет катет прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза есть a, а другой катет b.

Указанные формулы можно считать основными. При помощи их строятся более сложные формулы. Например:

7) $x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Подведя a под знак радикала, получим:

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \sqrt{a \cdot \frac{2}{3}a}.$$

Отсюда видно, что x есть средняя пропорциональная между отрезками a и $\frac{2}{3}a$.

8) $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 + d^2}$. Положим, что $a^2 + b^2 = k^2$. Тогда k найдётся как гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого катеты суть a и b. Построив k, положим, что $k^2 + d^2 = l^2$. Тогда l найдётся как гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого катеты суть k и d. Построив l, будем иметь $x = \sqrt{l^2 - c^2}$. Следовательно, x есть катет такого треугольника, у которого гипотенуза l, а другой катет c.

Ограничимся этими примерами. Заметим, что подробное рассмотрение способов построения алгебраических формул приводит к следующему важному выводу:

С помощью линейки и циркуля возможно строить только такие алгебраические выражения, которые могут быть получены из

известных величин с помощью конечного числа рациональных операций и извлечения квадратных корней.

УПРАЖНЕНИЯ.

Доказать теоремы.

1. Прямая, проведённая через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения непараллельных сторон и через точку пересечения диагоналей.

2. Если в треугольнике из вершины угла, лежащего между неравными сторонами, проведены биссектриса и медиана, то первая меньше второй.

3. Если два круга касаются извне, то часть внешней общей касательной, ограниченная точками касания, есть средняя пропорциональная между диаметрами кругов.

4. Если на сторонах угла отложим от вершины пропорциональные отрезки, то прямые, соединяющие соответственные концы их, будут параллельны.

5. Если в прямоугольный $\triangle ABC$ вписать квадрат $DEFG$ так, чтобы сторона DE лежала на гипотенузе BC, то эта сторона есть средняя пропорциональная между отрезками гипотенузы BD и EC (точки на гипотенузе следуют в порядке B, D, E, C).

6. Если два отрезка AB и CD пересекаются (хотя бы при продолжении) в точке E так, что $BE \cdot EA = EC \cdot ED$, то точки A, B, C и D лежат на одной окружности [теорема, обратная изложенным в § 57(200) и 59(202)].

7. Дана окружность O и две точки A и B. Через эти точки проведено несколько окружностей, пересекающих окружность O или касающихся её. Доказать, что все хорды, соединяющие точки пересечения каждой из этих окружностей с окружностью O, а также и общие касательные сходятся (при продолжении) в одной точке, лежащей на продолжении AB.

8. Основываясь на свойстве, изложенном в предыдущей задаче, вывести способ построения такой окружности, которая проходит через две данные точки A и B и касается данной окружности O.

9. Даны два каких-нибудь круга на плоскости. Если два радиуса этих кругов движутся, оставаясь постоянно параллельными, то прямая, проходящая через концы их, пересекает линию центров всегда в одной и той же точке (в центре подобия двух кругов).

10. Медиана треугольника делит пополам все прямые, проведённые внутри треугольника параллельно той стороне, относительно которой взята медиана.

11. Даны три прямые, исходящие из одной точки. Если по одной из них движется какая-нибудь точка, то расстояния её от двух других прямых сохраняют всегда одно и то же отношение.

12. Если две окружности концентрические, то сумма квадратов расстояний всякой точки одной из них от концов какого угодно диаметра другой есть величина постоянная [§ 54(197)].

13. Если соединим прямыми основания трёх высот какого-нибудь треугольника, то образовавшиеся при этом три треугольника у вершин данного подобны ему. Вывести отсюда, что для треугольника,

имеющего сторонами прямые, соединяющие основания высот данного треугольника, эти высоты служат биссектрисами.

14. Диаметр AB данной окружности продолжен за точку B. Через какую-нибудь точку C этого продолжения проведена прямая $CD \perp AB$. Если произвольную точку M этого перпендикуляра соединим с A, то (обозначим через A_1 вторую точку пересечения с окружностью этой прямой) произведение $AM \cdot AA_1$ есть величина постоянная для всякой точки M.

Найти геометрические места.

15. Середин всех хорд, проходящих через данную точку окружности.

16. Точек, делящих в одном и том же отношении $m : n$ все хорды, проходящие через данную точку окружности.

17. Точек, расстояние которых от сторон данного угла имеет одно и то же отношение $m : n$.

18. Точек, для которых сумма квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная [§ 54(197)].

19. Точек, для которых разность квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная.

20. Точек, делящих в данном отношении $m : n$ все прямые, соединяющие точки окружности с данной точкой O (лежащей вне или внутри круга).

Задачи на построение.

21. Через точку, данную внутри или вне угла, провести прямую так, чтобы отрезки её, заключённые между этой точкой и сторонами угла, имели данное отношение $m : n$.

22. Найти в треугольнике такую точку, чтобы перпендикуляры, опущенные из неё на стороны треугольника, находились в данном отношении $m : n : p$ (см. упражнение 17).

23. Построить треугольник по углу, одной из сторон, прилежащих к нему, и по отношению этой стороны к третьей стороне (сколько решений?).

24. То же — по углу при вершине, основанию и отношению его к одной из боковых сторон.

25. То же — по высоте, углу при вершине и отношению отрезков основания.

26. То же — по углу при вершине, основанию и данной на основании точке, через которую проходит биссектриса угла при вершине.

27. То же — по двум углам и сумме или разности основания с высотой.

28. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и сумме основания с высотой.

29. На бесконечной прямой MN даны две точки A и B. Найти на этой прямой третью точку C, чтобы $CA : CB = m : n$, где m и n — данные отрезки прямой или данные числа (если $m \neq n$, то таких точек существует две: одна между A и B, другая вне отрезка AB).

30. Вписать в данный круг треугольник, у которого даны: основание и отношение двух сторон.

31. Вписать в данный круг треугольник, у которого даны: основание и медиана относительно одной из неизвестных сторон.

32. Вписать квадрат в данный сегмент так, чтобы одна его сторона лежала на хорде, а вершины противолежащих углов — на дуге.

Указание: задачи решаются методом подобия [§ 38(181)].

33. Вписать квадрат в данный треугольник так, чтобы одна сторона его лежала на основании треугольника, а вершины противолежащих углов — на боковых сторонах треугольника.

34. В данный треугольник вписать прямоугольник (см. предыдущую задачу), у которого стороны относились бы, как $m : n$.

35. Около данного квадрата описать треугольник, подобный данному треугольнику.

36. Дана окружность и на ней две точки A и B. Найти на этой окружности третью точку C, чтобы расстояния её от A и B находились в данном отношении.

37. Построить треугольник по двум сторонам и биссектрисе угла между ними (см. черт. 35: сначала находим прямую CE из пропорции: $CE : BD = AE : AB$, затем строим $\triangle BCE$ и т. д.).

38. Построить отрезок x, который относился бы к данному отрезку m, как $a^2 : b^2$ (a и b — данные отрезки прямой).

39. Найти вне данного круга такую точку, чтобы касательная, проведённая из нее к этой окружности, была вдвое меньше секущей, проведённой из этой же точки через центр (приложением алгебры к геометрии)

40. Через данную вне круга точку провести такую секущую, которая разделилась бы этой окружностью в данном отношении (приложением алгебры к геометрии).

41. Построить треугольник по трём его высотам h_1, h_2, h_3. Решение. Предварительно из подобия прямоугольных треугольников надо доказать, что высоты обратно пропорциональны соответствующим сторонам. Если стороны, на которые опущены высоты h_1, h_2, h_3, обозначим соответственно через x_1, x_2, x_3, то

$$x_1 : x_2 = h_2 : h_1,$$

$$x_2 : x_3 = h_3 : h_2 = 1 : \frac{h_2}{h_3} = h_1 : \frac{h_1 h_2}{h_3},$$

откуда

$$x_1 : x_2 : x_3 = h_2 : h_1 : \frac{h_1 h_2}{h_3}.$$

Выражение $\frac{h_1 h_2}{h_3}$ есть четвёртая пропорциональная к h_3, h_2 и h_1. Построив её (пусть это будет k), мы будем иметь три отрезка прямой: h_2, h_1 и k, которым искомые стороны пропорциональны; значит, треугольник, имеющий эти отрезки сторонами, подобен искомому, и потому вопрос приводится к построению такого треугольника, который, будучи подобен данному, имел бы данную высоту. Задача окажется невозможной, если по трём прямым h_1, h_2 и k нельзя построить треугольник.

42. Построить отрезки, выражаемые формулами:

$$1)\ x = \frac{abc}{de} = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{e}$$

(придётся два раза построить четвёртую пропорциональную);

$$2)\ x = \sqrt{a^2 + bc}$$

(предварительно построить отрезок $k = \sqrt{bc}$, потом $x = \sqrt{a^2 + k^2}$).

Задачи на вычисление.

43. По данному основанию a и высоте h остроугольного треугольника вычислить сторону x квадрата, вписанного в этот треугольник так, что одна сторона квадрата лежит на основании треугольника, а две вершины квадрата — на боковых сторонах треугольника.

44. Стороны треугольника суть 10, 12 и 17 *м*. Вычислить отрезки стороны, равной 17 *м*, на которые она делится биссектрисой противолежащего угла.

45. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, делит её на два отрезка m и n. Вычислить катеты.

46. По трём сторонам a, b и c треугольника ABC вычислить медиану AD, проведённую к стороне BC.

Указание. Продолжив AD на расстояние $DE = AD$ и соединив точку E с B и C, получим параллелограмм, к которому применим теорему § 54(197).

47. В $\triangle ABC$ стороны равны: $AB = 7$, $BC = 15$ и $AC = 10$. Определить, какого вида угол A, и вычислить высоту, опущенную из вершины B.

48. Из точки вне круга проведена касательная a и секущая. Вычислить длину секущей, зная, что отношение внешней ее части к внутренней равно $m : n$.

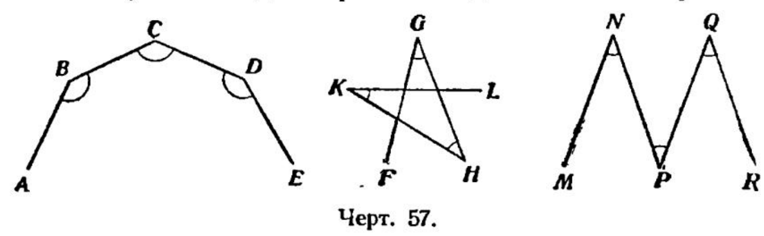
49. К двум кругам, радиусы которых суть R и r, а расстояние между центрами d, проведена общая касательная. Определить вычислением положение точки пересечения этой касательной с линией центров, во-первых, когда эта точка лежит по одну сторону от центров, во-вторых, когда она расположена между ними.

ГЛАВА II(IV).

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ.

I. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ.

69(212). Определения. Ломаная линия называется **правильной**, если она удовлетворяет следующим трём условиям: 1) отрезки прямых, составляющие её, равны; 2) углы, составленные каждыми двумя соседними отрезками, равны и 3) из каждых трёх последовательных отрезков



Черт. 57.

первый и третий расположены по одну сторону от прямой, на которой лежит второй.

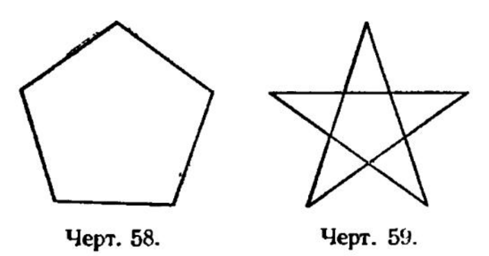
Таковы, например, линии $ABCDE$ и $FGHKL$ (черт. 57); но ломаную $MNPQR$ нельзя назвать правильной, потому что она не удовлетворяет третьему условию.

Правильная ломаная может быть **выпуклой**, как, например, линия $ABCDE$.

Многоугольник называется **правильным**, если он ограничен правильной ломаной линией, т. е. если он имеет равные стороны и равные углы. Таковы, например, квадрат, равносторонний треугольник и др.

Многоугольник, изображённый на чертеже 58, есть **выпуклый** правильный пятиугольник; многоугольник

чертежа 59 — также правильный пятиугольник, но не выпуклый (так называемый звёздчатый). В нашем курсе геометрии мы будем рассматривать только выпуклые правильные многоугольники, и поэтому, когда мы

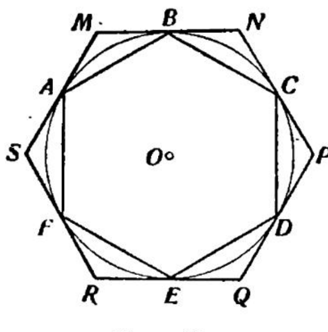


Черт. 58. Черт. 59.

скажем «правильный многоугольник», мы будем подразумевать слово «выпуклый».

Последующие теоремы показывают, что построение правильных многоугольников тесно связано с разделением окружности на равные части.

70(213). Теорема. ***Если окружность разделена на некоторое число равных частей (большее двух), то:***



Черт. 60.

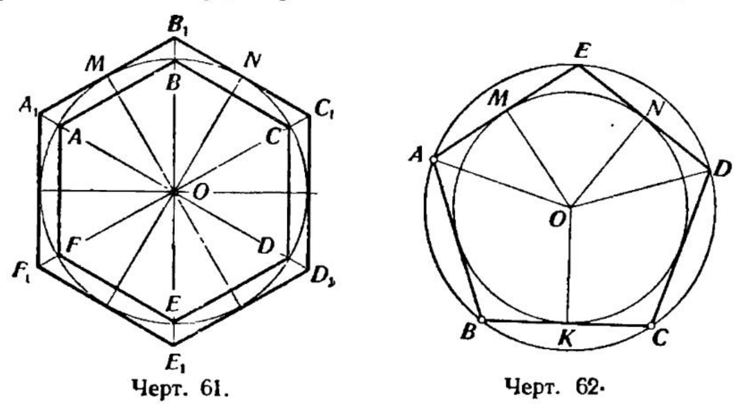
1) ***соединив хордами каждые две соседние точки деления, получим правильный многоугольник (вписанный);***

2) ***проведя через все точки деления касательные и продолжив каждую из них до взаимного пересечения с касательными соседних точек деления, получим правильный многоугольник (описанный).***

Пусть окружность (черт. 60) разделена на несколько равных частей в точках A, B, C и т. д. и через эти точки проведены хорды AB, BC, ... и касательные MBN, NCP и т. д. Тогда:

1) Вписанный многоугольник $ABCDEF$ — правильный, потому что все его стороны равны (как хорды, стягивающие равные дуги) и все углы равны (как вписанные, опирающиеся на равные дуги).

2) Чтобы доказать правильность описанного многоугольника $MNPQRS$, рассмотрим треугольники AMB, BNC и т. д. У них основания AB, BC и т. д. равны; углы, прилежащие к этим основаниям, также равны, потому что каждый из них имеет одинаковую меру (угол, составленный касательной и хордой, измеряется половиной дуги, заключённой внутри него). Значит, все эти треугольники равнобедренные и равны между собой, а потому $MN = NP = \ldots$ и $\angle M = \angle N = \ldots$, т. е. многоугольник $MNPQRS$ правильный.



Черт. 61. Черт. 62.

71(214). Замечание. Если из центра O (черт. 61) опустим на хорды AB, BC и т. д. перпендикуляры и продолжим их до пересечения с окружностью в точках M, N и т. д., то эти точки разделят все дуги и хорды пополам и тем самым разделят окружность на равные части. Поэтому, если через точки M, N и т. д. проведём касательные до взаимного пересечения, как указано выше, то получим также правильный описанный многоугольник, стороны которого будут параллельны сторонам вписанного многоугольника. Каждая пара вершин A и A_1, B и B_1 и т. д. лежит на одной прямой с центром, а именно: на биссектрисе угла MON и других таких же углов.

72(215). Теорема. ***Если многоугольник правильный, то:***

1) ***около него можно описать окружность;***

2) ***в него можно вписать окружность.***

1) Проведём окружность через какие-нибудь три соседние вершины A, B и C (черт. 62) правильного многоуголь-

ника $ABCDE$ и докажем, что она пройдёт через следующую, четвёртую вершину D. Опустим из центра O перпендикуляр OK на хорду BC и соединим O с A и D. Повернём четырёхугольник $ABKO$ вокруг стороны OK так, чтобы он упал на четырёхугольник $ODCK$. Тогда KB пойдёт по KC (вследствие равенства прямых углов при точке K), точка B упадёт в C (так как хорда BC делится в точке K пополам), сторона BA пойдёт по CD (вследствие равенства углов B и C) и, наконец, точка A упадёт в D (вследствие равенства сторон BA и CD). Из этого следует, что OA совместится с OD, и, значит, точки A и D одинаково удалены от центра; поэтому вершина D должна лежать на окружности, проходящей через A, B и C. Точно так же докажем, что эта окружность, проходя через три соседние вершины B, C и D, пройдёт через следующую вершину E, и т. д.; значит, она пройдёт через все вершины многоугольника.

2) Из доказанного следует, что стороны правильного многоугольника всегда можно рассматривать как равные хорды одной окружности; но такие хорды одинаково удалены от центра; значит, все перпендикуляры OM, ON и т. д., опущенные из O на стороны многоугольника, равны между собой, и потому окружность, описанная радиусом OM с центром в точке O, будет вписанной в многоугольник $ABCDE$.

73(216). Следствие. Из предыдущего видно, что две окружности, описанная около правильного многоугольника и вписанная в него, имеют один и тот же центр. Так как этот общий центр одинаково удалён от всех вершин многоугольника, то он должен лежать на перпендикуляре, восставленном к любой стороне многоугольника из её середины, а будучи одинаково удалён от сторон каждого угла, он должен находиться на его биссектрисе. Поэтому, чтобы найти центр окружности, описанной около правильного многоугольника или вписанной в него, достаточно определить точку пересечения двух перпендикуляров, восставленных к сторонам многоугольника из их середин, или двух биссектрис углов, или одного такого перпендикуляра с биссектрисой.

Легко заметить, что перпендикуляры, восставленные к сторонам правильного многоугольника в серединах этих сторон, а также биссектрисы всех углов правильного многоугольника являются его осями симметрии.

74(217). Определения. Общий центр окружностей, опи-

санной около правильного многоугольника и вписанной в него, называется **центром** этого многоугольника, радиус вписанной окружности — **апофемой** его.

Угол, составленный двумя радиусами, проведёнными к концам какой-нибудь стороны правильного многоугольника, называется **центральным углом**. Центральных углов в многоугольнике столько, сколько сторон; все они равны как измеряющиеся равными дугами.

Так как сумма всех центральных углов равна $4d$, или $360°$, то каждый из них равен $4d : n$, или $360° : n$, если n означает число сторон многоугольника; так, центральный угол правильного шестиугольника равен $360° : 6 = 60°$, правильного восьмиугольника равен $360° : 8 = 45°$ и т. п.

Так как сумма всех внутренних углов многоугольника, имеющего n сторон, равна $2d(n-2)$, то каждый внутренний угол правильного многоугольника, имеющего n сторон, равен:

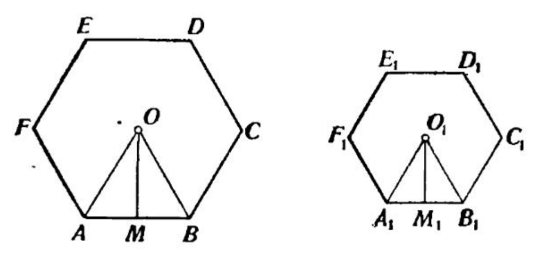
$$\frac{2d(n-2)}{n}.$$

Например, у правильного восьмиугольника внутренний угол равен:

$$\frac{2d(8-2)}{8} = \frac{12d}{8} = \frac{3}{2}d = 135°.$$

75(218). Теорема. ***Правильные одноимённые многоугольники подобны и стороны их относятся, как радиусы или апофемы.***

1) Чтобы доказать подобие (черт. 63) правильных одноимённых многоугольников $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$,

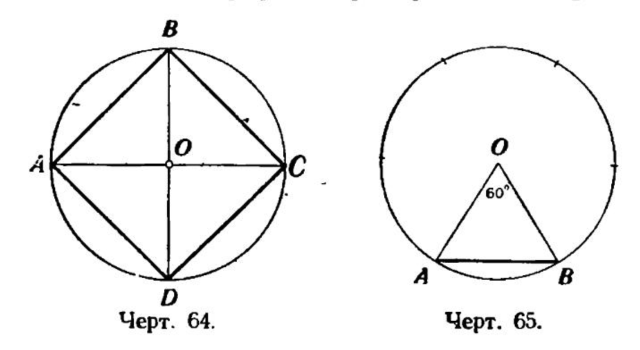


Черт. 63.

достаточно обнаружить, что у них углы равны и стороны пропорциональны.

Углы многоугольников равны, так как каждый из них содержит одно и то же число градусов, а именно: $\frac{180^\circ (n-2)}{n}$, если n означает число сторон каждого многоугольника. Так как $AB = BC = CD = \ldots$ и $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = \ldots$, то очевидно, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \ldots$, т. е. у таких многоугольников стороны пропорциональны.

2) Пусть O и O_1 (черт. 63) будут центры данных многоугольников, OA и O_1A_1 — их радиусы, OM и O_1M_1 — апо-



Черт. 64. Черт. 65.

фемы. Треугольники OAB и $O_1A_1B_1$ подобны, так как углы одного соответственно равны углам другого.

Из подобия их следует:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{OM}{O_1M_1}.$$

Следствие. Так как периметры подобных многоугольников относятся, как сходственные стороны [§29(172)], то *периметры правильных одноимённых многоугольников относятся, как радиусы или как апофемы.*

76(219). Задача. *Вычислить сторону вписанного в круг:* 1) *квадрата*; 2) *правильного шестиугольника*; 3) *правильного треугольника.*

Условимся обозначать длину стороны правильного многоугольника, имеющего n сторон, буквой a_n, а его периметр — буквой p_n.

Формулы для сторон вписанного квадрата, шестиугольника и треугольника можно легко получить из рассмотрения чертежей 64, 65 и 66.

1) На чертеже 64 проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AC и BD и последовательные концы их

соединены хордами; от этого получился вписанный квадрат $ABCD$.

Из прямоугольного $\triangle AOB$ находим:

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 = 2R^2,$$

откуда

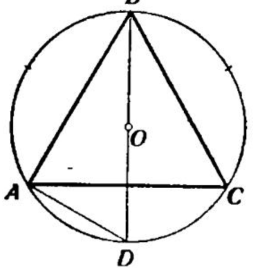
$$a_4 = R\sqrt{2}.$$

77(220). 2) На чертеже 65 построена хорда, соответствующая центральному углу в 60° (сторона правильного вписанного шестиугольника).

Так как у равнобедренного $\triangle AOB$ каждый из углов A и B равен $(180° - 60°) : 2 = 60°$, то $\triangle AOB$ есть равноугольный и, следовательно, равносторонний; значит,

$$AB = AO, \text{ т. е. } a_6 = R.$$

Так мы получаем простой способ деления окружности на шесть равных частей.



Черт. 66.

78(221). 3) На чертеже 66 окружность разделена на шесть равных частей и точки деления через одну последовательно соединены хордами, отчего образовался вписанный равносторонний $\triangle ABC$. Проведя хорду AD, получаем прямоугольный треугольник ABD (угол BAD как вписанный, опирающийся на диаметр, есть прямой). Из $\triangle ABD$ находим:

$$AB = \sqrt{BD^2 - AD^2},$$

т. е.

$$a_3 = \sqrt{(2R)^2 - R^2},$$

и, значит,

$$a_3 = R\sqrt{3}.$$

79(222). З а д а ч а. *Вписать в данный круг правильный десятиугольник и определить его сторону в зависимости от радиуса.*

Предварительно докажем одно важное с в о й с т в о п р а в и л ь н о г о 10-у г о л ь н и к а. Пусть хорда AB (черт. 67) есть сторона правильного 10-угольника. Тогда угол AOB равен 36°, а каждый из углов A и B содержит по $\frac{1}{2}(180° - 36°)$, т. е. по 72°. Разделим угол A пополам прямой AC. Каждый из углов, образовавшихся при точке A, равен 36°; следовательно, $\triangle ACO$, имея два равных угла, есть равнобедренный, т. е. $AC = CO$, $\triangle ABC$ также равнобедренный, потому что

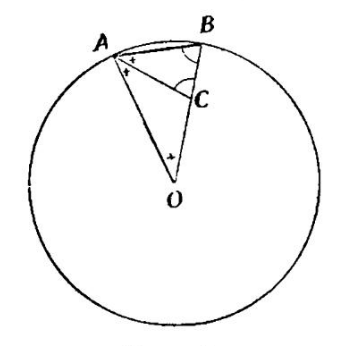
$\angle B = 72°$ и $\angle ACB = 180° - 72° - 36° = 72°$; следовательно, $AB = AC = CO$. По свойству биссектрисы угла треугольника [§ 43 (186)] можно написать:

$$AO : AB = OC : CB. \tag{1}$$

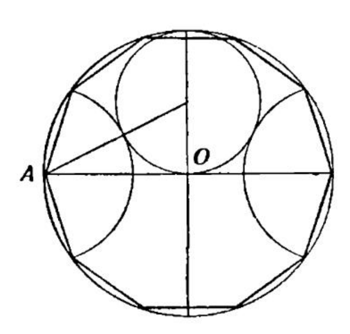
Заменив AO и AB равными им отрезками OB и OC, получим:

$$OB : OC = OC : CB, \tag{2}$$

т. е. радиус OB разделён в точке C в среднем и крайнем отношении, причём OC есть его бо́льшая часть. Но OC равна стороне правильного вписанного 10-угольника; значит, *сторона правильного вписанного 10-угольника равна бо́льшей части радиуса, разделённого в среднем и крайнем отношении.*



Черт. 67.



Черт. 68.

Теперь задача решается легко:

1) Делят радиус круга (например OA, черт. 68) в среднем и крайнем отношении; затем, дав циркулю раствор, равный бо́льшей части радиуса, откладывают им по окружности дуги, одна за другой, и точки деления последовательно соединяют хордами.

2) Обозначив длину стороны правильного вписанного 10-угольника буквой x, мы можем пропорцию (2) переписать так:

$$R : x = x : (R - x),$$

откуда

$$x^2 + Rx - R^2 = 0.$$

Решив это квадратное уравнение, найдём:

$$x = a_{10} = R\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = R \cdot 0{,}61803 \ldots .$$

80(223). Замечания. 1) Чтобы вписать в данный круг правильный пятиугольник, делят окружность на 10 равных частей (как указано выше) и точки деления соединяют через одну хордами.

2) Из равенства

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5}{30} - \frac{3}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

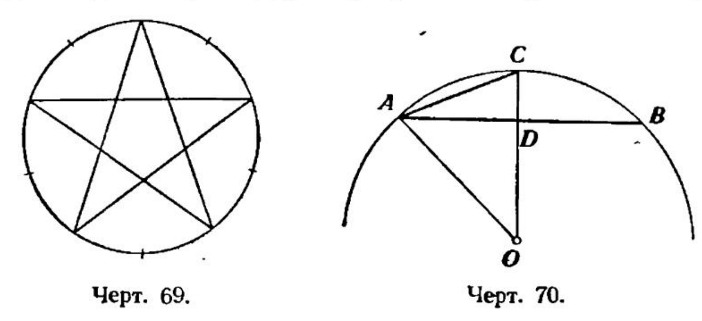
видно, что если из $\frac{1}{6}$ части окружности вычесть $\frac{1}{10}$ её часть, то остаток будет равен $\frac{1}{15}$ окружности. Это даёт нам простой способ вписать в

окружность правильный 15-угольник, так как делить окружность на 6 и на 10 равных частей мы умеем.

3) Чтобы построить пятиконечную звезду (черт. 69), делят окружность на 10 равных частей и точки деления соединяют хордами через три, как указано на чертеже.

81(224). Задача. *Удвоить число сторон правильного вписанного многоугольника.*

В этом сокращённом выражении разумеются, собственно, две задачи: 1) по данному правильному вписанному



Черт. 69. Черт. 70.

многоугольнику построить другой правильный многоугольник, вписанный в ту же окружность, но имеющий вдвое больше сторон; 2) вычислить сторону этого многоугольника по данной стороне первого многоугольника и данному радиусу круга.

1) Пусть AB (черт. 70) есть сторона правильного вписанного многоугольника, имеющего n сторон, и O — центр круга. Проведём $OC \perp AB$ и соединим A с C. Дуга AB делится в точке C пополам; следовательно, хорда AC есть сторона правильного вписанного многоугольника, имеющего $2n$ сторон.

2) В $\triangle ACO$ угол O всегда острый (так как дуга ACB всегда меньше полуокружности и, следовательно, половина её, дуга AC, меньше четверти окружности); поэтому [§ 51(194)]

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OC \cdot OD,$$

т. е.

$$a_{2n}^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot OD = 2R^2 - 2R \cdot OD.$$

Из прямоугольного $\triangle AOD$ определим катет OD:

$$OD = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Следовательно,

$$a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Такова **формула удвоения** числа сторон правильного вписанного многоугольника (из неё сторону a_{2n} получим посредством извлечения квадратного корня).

Пример. Вычислим сторону правильного вписанного 12-угольника, причём для простоты примем $R = 1$ (и, следовательно, $a_6 = 1$):

$$a_{12}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}} = 2 - \sqrt{3},$$

откуда

$$a_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0{,}517\ \dots .$$

Так как стороны правильных одноимённых многоугольников пропорциональны их радиусам [§ 75(218)], то при радиусе, равном не единице, а какому-нибудь числу R, для стороны правильного 12-угольника получим такую формулу:

$$a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}} = R \cdot 0{,}517\ \dots .$$

82(225). На сколько равных частей можно делить окружность с помощью циркуля и линейки? Применяя указанные в предыдущих задачах способы, мы можем с помощью циркуля и линейки делить окружность на такое число равных частей (и, следовательно, вписывать в окружность правильные многоугольники с таким числом сторон), которое заключается в следующей таблице:

3	$3 \cdot 2$	$3 \cdot 2 \cdot 2 \dots$	вообще	$3 \cdot 2^n$;
4	$4 \cdot 2$	$4 \cdot 2 \cdot 2 \dots$	»	2^n;
5	$5 \cdot 2$	$5 \cdot 2 \cdot 2 \dots$	»	$5 \cdot 2^n$;
15	$15 \cdot 2$	$15 \cdot 2 \cdot 2 \dots$	»	$3 \cdot 5 \cdot 2^n$.

Доказано, что посредством циркуля и линейки можно делить окружность на такое число равных частей, которое, будучи *простым*, выражается формулой $2^{2^n} + 1$. Например, можно разделить окружность на 17 равных частей и на 257 равных частей, так как 17 и 257 суть простые числа вида $2^{2^n} + 1$ $(17 = 2^{2^2} + 1;\ 257 = 2^{2^3} + 1)$. Доказательство этого выходит за пределы элементарной математики.

Доказано также, что с помощью линейки и циркуля окружность можно делить на такое **составное** число равных частей, в состав которого не входят никакие иные простые множители, кроме: 1) множителей вида $2^{2^n}+1$ и 2) множителя 2 в какой угодно степени. Например, в окружность с помощью циркуля и линейки можно вписать правильный 170-угольник $[170 = 2 \cdot 5 \cdot 17 = 2 \cdot (2^2+1) \cdot (2^{2^2}+1)]$.

На всякое иное число равных частей окружность может быть разделена **приближённо**. Пусть, например, требуется разделить окружность на 7 равных частей (или вписать правильный семиугольник). Тогда предварительно вычислим величину центрального угла, он равен: $\frac{360^\circ}{7} = 51\frac{3^\circ}{7}$. Построить точно такой угол мы не можем, но по транспортиру приблизительно можем отложить при центре угол в 51° и тогда получим приблизительно $\frac{1}{7}$ часть окружности.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Составить формулу для стороны правильного вписанного 24-угольника.

2. Составить формулу для сторон правильных вписанных восьмиугольника и 16-угольника.

3. Составить формулу для сторон правильных описанных треугольника и шестиугольника.

4. Пусть AB, BC и CD будут три последовательные стороны правильного многоугольника, имеющего центр O. Если продолжим стороны AB и CD до взаимного пересечения в точке E, то четырёхугольник $OAEC$ может быть вписан в окружность. Доказать.

5. Доказать, что: 1) всякий вписанный равносторонний многоугольник правильный; 2) всякий описанный равноугольный многоугольник правильный.

6. Доказать, что: 1) каждый правильный n-угольник имеет n осей симметрии, причём все эти оси симметрии проходят через его центр; 2) для многоугольника с чётным числом сторон центр многоугольника является центром его симметрии.

7. Доказать, что две диагонали правильного пятиугольника, не исходящие из одной вершины, пересекаясь, делятся в среднем и крайнем отношении.

Указание. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник, AC и BE — его диагонали, F — точка их пересечения. $\triangle ABC \backsim \triangle ABF$. и т. д.

8. На данной стороне построить: 1) правильный восьмиугольник; 2) правильный 10-угольник.

9. Срезать от данного квадрата углы так, чтобы образовался правильный восьмиугольник.

10. В данный квадрат вписать равносторонний треугольник, помещая одну из его вершин или в вершине квадрата, или в середине какой-либо стороны.

11. Вписать в равносторонний треугольник другой равносторонний треугольник, стороны которого были бы перпендикулярны к сторонам данного.

12. Построить углы: в 18°, 30°, 75°, 72°.

13. Около окружности описан какой-нибудь правильный многоугольник. Пользуясь им, вписать в эту окружность правильный многоугольник, имеющий вдвое больше сторон, чем описанный.

II. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ И ЕЁ ЧАСТЕЙ.

83(226). **Предварительное разъяснение.** Отрезок прямой можно сравнить с другим отрезком прямой, принятым за единицу, так как прямые линии при наложении совмещаются. Действительно, только по этой причине мы можем установить, какие отрезки прямых считать равными и неравными; что такое сумма отрезков прямой; какой отрезок более другого в 2, 3, 4, ... раза и т. п. Точно так же дуги окружностей одинакового радиуса можно сравнить между собой вследствие того, что такие дуги при наложении совмещаются. Но так как никакая часть окружности (или другой кривой) не может совместиться с прямой, то нельзя путём наложения установить, какой криволинейный отрезок должно считать равным данному прямолинейному отрезку, а следовательно, и то, какой криволинейный отрезок больше данного прямолинейного в 2, 3, 4, ... раза. Таким образом, является необходимость особо определить, что мы будем подразумевать под *длиной окружности* (или части её), когда сравниваем её с прямолинейным отрезком.

Для этой цели мы должны ввести новое понятие, имеющее исключительно большое значение во всей математике, именно *понятие о пределе*.

Предел числовой последовательности.

84(227). Во многих вопросах алгебры и геометрии приходится встречаться с последовательностями чисел, написанных одно за другим по определённому закону. Например, натуральный ряд чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots,$$

арифметическая и геометрическая прогрессии, продолженные неограниченно:

$$a,\ a+d,\ \ a+2d,\ \ a+3d,\ \ldots,$$
$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \ldots,$$

представляют собой бесконечные последовательности чисел, или бесконечные числовые последовательности.

Для каждой такой последовательности можно указать правило, по которому составляются её члены. Так, в арифметической прогрессии каждый член разнится от предыдущего на одно и то же число, в геометрической прогрессии каждый член равен предшествующему, умноженному на некоторое определённое число (знаменатель прогрессии).

Многие последовательности составляются по более сложным правилам. Так, например, вычисляя $\sqrt{2}$ с недостатком, сначала с точностью до $\frac{1}{10}$, затем с точностью до $\frac{1}{100}$, затем до $\frac{1}{1000}$ и продолжая это вычисление неограниченно, мы получим бесконечную числовую последовательность:

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142,\ \ldots,$$

дающую приближённое значение $\sqrt{2}$ с возрастающей степенью точности.

Для этой последовательности нельзя указать простого правила, по которому можно было бы получить новые её члены, зная предыдущие, но всё же можно определить любой член этой последовательности. Так, чтобы получить 4-й её член, нужно вычислить $\sqrt{2}$ с точностью до 0,0001, для получения 5-го члена нужно вичислить $\sqrt{2}$ с точностью до 0,00001 и т. д.

Допустим, что члены данной бесконечной последовательности $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$, по мере повышения их номера, неограниченно приближаются к некоторому числу A. Это значит следующее: существует некоторое число A такое, что какое бы малое положительное число q мы ни взяли, в данной последовательности можно отыскать член, начиная с которого все члены последовательности по абсолютной величине отличаются от A меньше, чем на q. Мы будем это свойство коротко выражать так: абсолютная величина разности $a_n - A$ неограниченно убывает с возрастанием номера n.

В этом случае число A называется пределом данной бесконечной числовой последовательности. Приведём пример такой последовательности. Составим последовательность десятичных дробей:

$$0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ \ldots\ .$$

Здесь каждый член получается из предыдущего приписыванием нового десятичного знака 9.

Легко заметить, что члены этой последовательности неограниченно приближаются к единице.

Именно, первый член отличается от единицы на $\frac{1}{10}$, второй — на $\frac{1}{100}$, третий — на $\frac{1}{1000}$, и если достаточно продолжить эту последовательность, то можно найти в ней член, начиная с которого все последующие члены будут отличаться от единицы на сколь угодно малую, заранее указанную величину. Следовательно, мы можем сказать, что взятая нами бесконечная числовая последовательность имеет пределом единицу. Другим примером числовой последовательности, имеющей предел, служит последовательность приближённых значений длины отрезка, несоизмеримого с единицей длины [§ 7 (150)], вычисленных с недостатком, сначала с точностью до $\frac{1}{10}$, затем — до $\frac{1}{100}$, затем — до $\frac{1}{1000}$ и т. д.

Пределом этой последовательности служит бесконечная десятичная дробь, представляющая точную меру длины данного отрезка. В самом деле, величина бесконечной десятичной дроби заключена между двумя её приближёнными значениями, вычисленными с одинаковой точностью — одно с недостатком, другое с избытком.

Как было показано выше, эта разность неограниченно убывает по мере повышения степени точности приближённых значений. Следовательно, должна неограниченно убывать и разность между самой бесконечной десятичной дробью и её приближёнными значениями по мере повышения степени точности этих значений. Значит, бесконечная десятичная дробь служит пределом последовательности всех её приближённых значений, взятых с недостатком (или всех приближённых значений, взятых с избытком).

Легко заметить, что не всякая бесконечная последовательность имеет предел; например, натуральный ряд чисел:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,$$

очевидно, никакого предела не имеет, так как его члены неограниченно возрастают и ни к какому числу не приближаются.

85(228). Теорема. ***Всякая бесконечная числовая последовательность может иметь только один предел.***

В справедливости этой теоремы легко убедиться доказательством от противного. В самом деле, предположим, что дана последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

которая имеет два различных предела A и B. В таком случае, в силу того, что A есть предел данной последовательности, абсолютная величина разности $a_n - A$ должна неограниченно убывать с возрастанием n. В силу того, что B есть тоже предел данной последовательности, абсолютная величина разности $a_n - B$ также должна неограниченно убывать с возрастанием n.

Но в таком случае абсолютная величина разности

$$(a_n - A) - (a_n - B)$$

должна также или неограниченно убывать, или быть равной нулю. Но эта последняя разность равна разности чисел $B - A$ и, следовательно, есть некоторое вполне определённое, отличное от нуля число. Это число не зависит от номера n и при возрастании n вовсе не изменяется. Таким образом, предположение, что существуют два предела числовой последовательности, привело нас к противоречию.

86(229). Предел возрастающей бесконечной числовой последовательности. Рассмотрим такую последовательность: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, в которой каждый следующий член больше предыдущего, т. е. $a_{n+1} > a_n$, и в то же время все члены последовательности меньше некоторого определённого числа M, т. е. для любого номера n $a_n < M$.

В этом случае последовательность имеет определённый предел. (Теорема Вейерштрасса.)

87(230). Доказательство. Пусть дана бесконечная числовая последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots, \quad (1)$$

в которой каждый член больше предыдущего или равен ему ($a_{n+1} \geqslant a_n$), причём среди членов последовательности нет числа, большего данного числа M, например нет числа, большего чем 10. Возьмём число 9 и посмотрим, нет ли среди членов последовательности (1) чисел, больше

чем 9. Допустим, что таких нет. Возьмём число 8 и посмотрим, имеются ли в последовательности (1) числа большие, чем 8. Допустим, что такие есть Тогда записываем число 8, затем делим промежуток от 8 до 9 на 10 частей и испытываем последовательно числа: 8,1; 8,2; 8,3; ..., т. е. смотрим, имеются ли среди членов последовательности (1) числа, бо́льшие чем 8,1. Если есть, то ставим тот же вопрос для числа 8,2, и т. д. Допустим, что в последовательности (1) есть числа, бо́льшие чем 8,6, но нет чисел, бо́льших чем 8,7. Тогда делаем вторую запись: пишем число 8,6, затем разбиваем промежуток от 8,6 до 8,7 на 10 частей и испытываем таким же образом последовательно числа: 8,61; 8,62; 8,63; ... . Допустим, что в последовательности (1) есть числа, бо́льшие чем 8,64, но нет чисел, бо́льших чем 8,65. Тогда делаем третью запись 8,64 и поступаем таким же образом для промежутка от 8,64 до 8,65. Продолжая этот процесс неограниченно, мы придём к бесконечной десятичной дроби: 8,64 ..., т. е. к некоторому действительному числу. Назовём его α и возьмём его приближённые значения с n десятичными знаками с недостатком и с избытком. Первое назовём α_n, второе α'_n. При этом, как известно [§ 7(150)],

$$\alpha_n < \alpha < \alpha'_n \text{ и } \alpha'_n - \alpha_n = \frac{1}{10^n}.$$

Из способа образования действительного числа α следует, что среди членов последовательности (1) нет чисел, бо́льших α'_n, но имеются числа, бо́льшие α_n. Пусть a_k — одно из таких чисел:

$$\alpha_n < a_k < \alpha'_n.$$

В силу возрастания последовательности (1) и отсутствия в ней членов, бо́льших α'_n, заключаем, что все следующие члены последовательности a_{k+1}, a_{k+2}, ... также заключены между α_n и α'_n, т. е. если $m > k$, то $\alpha_n < a_m < \alpha'_n$.

Так как действительное число α также заключено между α_n и α'_n, то абсолютная величина разности $a_m - \alpha$ меньше разности чисел α'_n и α_n. Но $\alpha'_n - \alpha_n = \frac{1}{10^n}$, следовательно,

$$|a_m - \alpha| < \frac{1}{10^n}. \quad (2)$$

Таким образом, для любого значения n можно указать такое число k, что при $m \geqslant k$ имеет место неравенство (2). Так как при неограниченном возрастании n дробь $\frac{1}{10^n}$ неограниченно убывает, то из равенства (2) следует, что действительное число α есть предел последовательности (1). Таким образом, числовая последовательность (1) имеет определённый предел.

88(231). Предел переменной величины. Если дана последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

то n-й член её a_n можно назвать *переменной величиной*, числовое значение которой зависит от её номера n. Этим выражением «переменная величина» часто пользуются для упрощения речи. Так, вместо выражения «дана бесконечная числовая последовательность a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...», принято говорить «дана переменная величина a_n, принимающая последовательно ряд значений a_1, a_2, a_3, ...». Если пользоваться этим способом выражения, то можно говорить не о пределе последовательности, а о пределе переменной величины.

В таком случае предложение, доказанное в § 85(228), можно высказать в форме: «Всякая переменная величина может стремиться лишь к одному пределу». Это предложение часто высказывают так: «Если даны две переменные величины a_n и b_n, причём все значения первой равны соответствующим значениям второй: $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, ..., $a_n=b_n$, ..., то предел первой величины, конечно, если он существует, равен пределу второй», или короче: «Если две переменные величины равны, то равны и их пределы».

Предложение [§ 86(229)] о пределе возрастающей числовой последовательности можно высказать так: *если переменная величина a_n возрастает с возрастанием номера n и в то же время остаётся меньше некоторого постоянного числа, то эта переменная величина имеет предел.*

Длина окружности.

Понятие о пределе даст возможность точно определить, что мы подразумеваем под длиной окружности. Предварительно докажем следующие леммы.

89(232). Лемма 1. ***Выпуклая ломаная*** (*ABCD*, черт. 71) ***меньше всякой другой ломаной*** (*AEFGD*), ***объемлющей первую.***

Черт. 71.

Выражения «объемлющая ломаная», «объемлемая ломаная» имеют следующий смысл. Пусть две ломаные (как те, которые изображены у нас на чертеже) имеют одни и те же концы A и D и расположены таким образом, что одна ломаная (*ABCD*) вся лежит внутри многоугольника, образованного другой

ломаной и отрезком AD, соединяющим концы A и D; тогда внешняя ломаная называется объемлющей, а внутренняя ломаная — объемлемой.

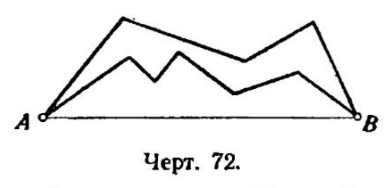
Предстоит доказать, что объемлемая ломаная $ABCD$ (если она выпуклая) короче всякой объемлющей линии $AEFGD$ (всё равно — выпуклой или невыпуклой), т. е. что

$$AB + BC + CD < AE + EF + FG + GD.$$

Продолжим стороны выпуклой ломаной так, как указано на чертеже. Тогда, приняв во внимание, что отрезок прямой меньше всякой ломаной, соединяющей концы отрезка, мы можем написать следующие неравенства:

$$AB + BH < AE + EH;$$
$$BC + CK < BH + HF + FG + GK;$$
$$CD < CK + KD.$$

Сложим почленно все эти неравенства и затем от обеих частей полученного неравенства отнимем вспомогательные отрезки BH и CK; далее, заменив сумму $EH + HF$ отрезком EF и сумму $GK + KD$ отрезком GD, получим то неравенство, которое требовалось доказать.



Черт. 72.

Замечание. Если бы объемлемая линия не была выпуклой (черт. 72), то изложенное доказательство нельзя было бы применить. В этом случае объемлемая ломаная может оказаться и больше объемлющей.

90(233). Лемма 2. ***Периметр выпуклого многоугольника** ($ABCD$) **меньше периметра всякого другого многоугольника** ($MNPQRL$), **объемлющего первый*** (черт. 73).

Требуется доказать, что

$$AB + BC + CD + DA < LM + MN + NP + PQ + QR + RL.$$

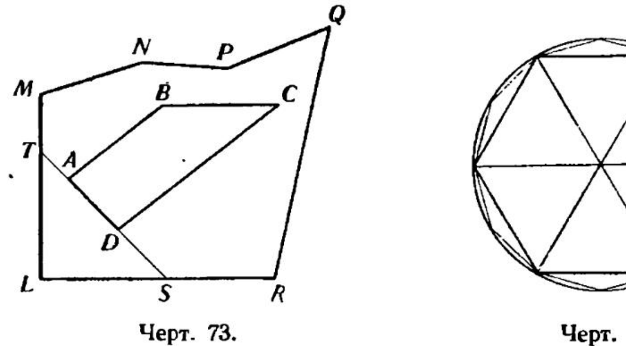
Продолжив в обоих направлениях одну какую-нибудь сторону, например AD, выпуклого многоугольника, применим к ломаным линиям $ABCD$ и $ATMNPQRSD$, соединяющим точки A и D, лемму предыдущего параграфа; получим неравенство:

$$AB + BC + CD < AT + TM + MN + NP + PQ + QR + RS + SD.$$

С другой стороны, так как отрезок ST меньше ломаной SLT, то можем написать:

$$TA + AD + DS < TL + LS.$$

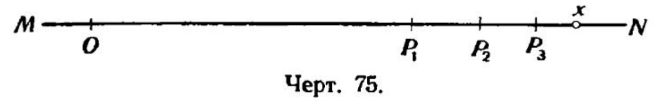
Сложим почленно эти два неравенства и отнимем от обеих частей вспомогательные отрезки AT и DS; далее,



Черт. 73. Черт. 74.

заменив сумму $TL + TM$ отрезком LM и сумму $LS + RS$ отрезком LR, получим то, что требовалось доказать.

91(234). Определение длины окружности. Впишем в данную окружность (черт. 74) правильный многоугольник, например шестиугольник, и на какой-нибудь прямой MN (черт. 75) отложим отрезок OP_1, равный периметру этого шестиугольника (на нашем чертеже этот периметр



Черт. 75.

изображён по недостатку свободного места в уменьшённом виде). Удвоим теперь число сторон вписанного шестиугольника, т. е. вместо шестиугольника возьмём правильный вписанный 12-угольник. Найдём также его периметр и отложим его на той же прямой MN от той же точки O; пусть тогда получится отрезок OP_2, который должен быть больше OP_1, так как вместо каждой стороны шестиугольника мы теперь берём ломаную (из двух сторон 12-угольника), которая длиннее прямой. Удвоим снова число сторон вписанного 12-угольника, т. е. возьмём теперь правильный 24-угольник (на чертеже он не указан), найдём его периметр и отложим его на MN от той же точки O; мы получим тогда

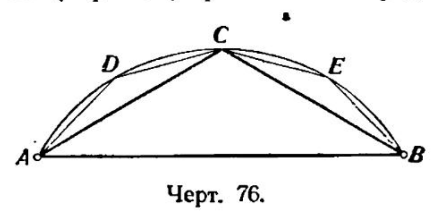
отрезок OP_3, который будет больше OP_2 по той же причине, по какой OP_2 больше OP_1.

Вообразим, что такой процесс удвоения и откладывания периметров продолжается все далее и далее. Тогда мы получим неограниченную последовательность периметров OP_1, OP_2, OP_3, ..., которая является возрастающей последовательностью. Однако возрастание это не может быть неограниченным, так как периметр всякого вписанного многоугольника (выпуклого), каково бы ни было число его сторон, всегда остаётся меньше периметра любого описанного многоугольника (как его объемлющего). Вследствие этого полученная последовательность периметров правильных вписанных многоугольников имеет определённый предел [§ 86(229)]. Этот предел и принимают за длину окружности. Таким образом, мы принимаем следующее определение: *за длину окружности принимается тот предел, к которому стремится (приближается) переменный периметр правильного многоугольника, вписанного в эту окружность, когда число сторон его неограниченно удваивается.*

Замечание. Можно доказать (мы опускаем это доказательство), что предел этот не зависит от того, с какого многоугольника мы начинаем удвоение. Более того, можно доказать, что если даже вписанные многоугольники и не будут правильные, всё же периметры их будут стремиться к тому же самому пределу, как и периметры правильных многоугольников, лишь бы только стороны их неограниченно уменьшались (и, следовательно, число сторон их неограниченно увеличивалось) путём ли удвоения, как мы это предполагали для правильных многоугольников, или по какому-нибудь иному закону (мы опускаем это доказательство).

Таким образом, для каждой окружности существует свой единственный предел, к которому стремится периметр вписанного выпуклого многоугольника, когда стороны его неограниченно уменьшаются; предел этот и принимается за длину окружности.

Равным образом за длину какой-нибудь дуги окружности AB (черт. 76) принимается предел, к которому стремится переменный периметр ломаной линии, вписанной в эту дугу и имеющей с ней одни и те же концы, когда число сторон ломаной неограниченно удваивается.



Черт. 76.

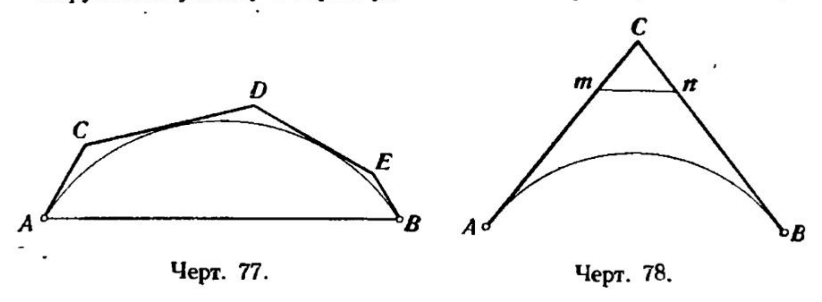
92(235). Допущения. Для простоты изложения мы примем без доказательства следующие, почти очевидные, предложения:

Длина дуги окружности: 1) больше стягивающей её хорды, но 2) меньше периметра всякой ломаной линии, описанной около этой дуги и имеющей с ней одни и те же концы (черт. 77).

93(236). Доказательство этих предложений.

1) Пусть ACB (черт. 76) — дуга окружности и AB — стягивающая её хорда; требуется доказать, что дуга больше этой хорды.

Предположим, что в дугу мы вписываем правильные ломаные таким образом: первая ломаная пусть будет составлена из двух хорд AC и CB; вторую ломаную получим путём удвоения числа сторон первой ломаной;



Черт. 77. Черт. 78.

это будет ломаная $ADCEB$, состоящая из четырёх хорд; третью ломаную получим удвоением числа сторон второй ломаной: она будет состоять из восьми хорд. Вообразим, что этот процесс удвоения продолжается неограниченно. Тогда с каждым удвоением периметр ломаной будет всё возрастать; например:

$$AD + DC + CE + EB > AC + CB,$$

так как

$$AD + DC > AC \text{ и } CE + EB > CB.$$

Вследствие этого предел, к которому стремится этот периметр, должен быть больше периметра первой ломаной, т. е. больше суммы $AC + CB$, и, значит, должен быть и подавно больше хорды AB. Но предел этот принимается за длину дуги ACB, значит, эта дуга больше хорды AB.

2) Пусть около дуги описана какая-нибудь ломаная линия (правильная или неправильная — всё равно) (черт. 77). Если концы ломаной совпадают с концами дуги, то эту дугу можно рассматривать как сумму нескольких дуг, из которых каждая объемлется ломаной, состоящей только из двух отрезков прямой. Пусть одна из таких частей будет дуга AB (черт. 78). Докажем, что длина этой дуги меньше суммы $AC + CB$, которую мы для краткости обозначим одной буквой S. Для доказательства возьмём вспомогательную ломаную $AmnB$, которая получится, если мы срежем угол C каким-нибудь отрезком прямой mn, непересекающимся с дугой AB (что всегда возможно, если ломаная описана, т. е. составлена из касательных). Обозначим длину этой вспомогательной ломаной $AmnB$ буквой S_1. Так как $mn < mC + Cn$, то $S_1 < S$.

Докажем теперь, что предел, к которому стремится переменный периметр правильной ломаной, вписанной в дугу AB, при неограниченном удвоении числа сторон ломаной, не может быть больше S_1. Обозначим этот предел буквой L и допустим, что $L > S_1$. Так как переменный периметр приближается к своему пределу L как угодно близко, то разность между L и этим периметром может сделаться меньше разности $L - S_1$; тогда, значит, периметр вписанной ломаной сделается больше S_1. Но это невозможно, так как всякая выпуклая ломаная линия, вписанная в дугу AB, есть объемлемая по отношению к объемлющей ломаной $AmnB$ и потому она меньше S_1. Следовательно, нельзя допустить, что $L > S_1$. Но тогда L должно быть или меньше S_1, или в крайнем случае равно S_1. Но так как $S_1 < S$, то и в этом и в другом случаях должно быть: $L < S$, что и требуется доказать.

94(237). Нахождение длины окружности. Для этой цели можно пользоваться формулой удвоения, которую мы вывели раньше [§ 81(224)], т. е. формулой:

$$a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Если радиус R примем за 1, то формула эта примет более простой вид:

$$a_{2n}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Обозначая, по принятому, через a_n сторону правильного вписанного многоугольника, имеющего n сторон, будем иметь: $a_6 = R = 1$.

Применяя формулу удвоения, находим:

$$a_{12}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 2 - \sqrt{3};$$

$$a_{24}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_{12}^2}{4}}; \quad a_{48}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_{24}^2}{4}} \text{ и т. д.}$$

Положим, что мы прекратили удвоение на 96-угольнике. Чтобы получить его периметр, надо сторону умножить на 96. Этот периметр можно принять за приближённое значение длины окружности. Обозначив его через p_{96} и выполнив вычисления, найдём:

$$p_{96} = 6{,}2820638\ldots .$$

При радиусе, равном R, получим:

$$p_{96} = R \cdot 6{,}2820638\ldots, \text{ или } p_{96} = 2R \cdot 3{,}1410319\ldots .$$

Обозначая длину окружности буквой C, мы получим для неё приближённую формулу:

$$C = 2R \cdot 3{,}1410319\ldots .$$

Если бы мы прекратили процесс удвоения на 192-угольнике, то получили бы для длины окружности более точное значение, именно:

$$C = 2R \cdot 3{,}14145247\ldots\ .$$

Продолжая процесс удвоения, можно получать для длины окружности всё более и более точные значения.

95(238). Отношение длины окружности к диаметру. Рассматривая процесс нахождения длины окружности, можно заметить, что число, на которое нужно умножить диаметр, чтобы получить длину окружности, не зависит от величины самого диаметра, так что если мы нашли, что длина какой-нибудь окружности равна её диаметру, умноженному на некоторое число, то и длина всякой другой окружности будет равна её диаметру, умноженному на то же самое число.

В самом деле, возьмём две окружности: одну радиуса R, другую радиуса r. Длину первой окружности обозначим через C, длину второй — через c. Впишем в каждую из них правильный многоугольник с одним и тем же числом сторон и будем удваивать число сторон каждого из этих многоугольников.

Обозначим через P_n переменный периметр правильного многоугольника, вписанного в первую окружность, и через p_n переменный периметр правильного многоугольника с тем же числом сторон, вписанного во вторую окружность.

В силу теорем, доказанных в § 75(218), мы можем написать:

$$\frac{P_n}{R} = \frac{p_n}{r}, \text{ или } \frac{P_n}{2R} = \frac{p_n}{2r}.$$

Переменный периметр P_n имеет пределом длину C первой окружности. Переменный периметр p_n имеет пределом длину c второй окружности. А потому из равенства $\frac{P_n}{2R} = \frac{p_n}{2r}$ вытекает $\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r}$ [§ 85(228) и 88(231)]. Таким образом, мы можем сказать, *что отношение длины окружности к её диаметру есть число, постоянное для всех окружностей.*

Это постоянное число принято обозначать греческой буквой π[1]).

---

[1]) Обозначение это введено, по всей вероятности, в XVII столетии. Буква π (пи) есть начальная буква греческого слова περιφέρεια (окружность).

Мы можем, таким образом, для длины C окружности написать такую формулу:

$$C = 2R \cdot \pi, \text{ или } C = 2\pi R.$$

Доказано, что число π является числом **иррациональным**, и, значит, оно не может быть выражено точно никаким рациональным числом. Но его приближённые значения можно находить различными способами с какой угодно точностью. Приняв периметр вписанного 96-угольника за приближённую длину окружности, мы получим для π приближённое значение 3.14 с недостатком и с точностью до 0,01. Эта точность для практических целей почти всегда достаточна. В случаях особенной точности можно довольствоваться таким приближённым значением (с избытком): $\pi = 3,1416$.

Учёные, пользуясь усовершенствованными способами, вычислили π с точностью, далеко превосходящей всякие практические требования (так, английский математик Шенкс в 1873 г. нашёл 707 десятичных знаков числа π)[1]).

Полезно заметить, что ещё в III веке до начала нашей эры знаменитый сиракузский геометр Архимед нашёл для π очень простое число $\frac{22}{7}$, т. е. $3\frac{1}{7}$. Это число несколько более π и разнится от него менее чем на 2 тысячных.

При решении геометрических задач часто встречается число, обратное числу π, т. е. равное дроби $\frac{1}{\pi}$. Полезно запомнить несколько цифр этого числа:

$$\frac{1}{\pi} = 0,3183098\ldots .$$

96(239). Длина дуги, содержащей n градусов. Длина окружности есть $2\pi R$, значит, длина дуги в 1° равна $\frac{2\pi R}{360} =$

[1]) Для запоминания довольно длинного ряда цифр, выражающих число π, можно пользоваться следующим французским двустишием:

Que j'aime à faire apprendre
Un nombre utile aux hommes!

или следующим русским (придуманным покойным преподавателем средней школы Шейроком):

Кто и шутя и скоро пожелает(ъ)
Пи узнать число уж(ъ) знает(ъ)!

Если выписать в ряд числа букв, заключающихся в каждом слове этих фраз (написанных по старой орфографии), то получим для π приближённое число (с избытком), 3,1415926536, верное до одной половины десятибиллионной.

$=\frac{\pi R}{180}$; следовательно, длина s дуги, содержащей $n°$, выразится так:

$$s=\frac{\pi R n}{180}.$$

Если дуга выражена в минутах (n') или в секундах (n''), то длина её определяется соответственно формулами:

$$s=\frac{\pi R n}{180\cdot 60} \text{ или } s=\frac{\pi R n}{180\cdot 60\cdot 60},$$

где n — число минут или секунд.

97(240). З а д а ч а. *Вычислить с точностью до 1 мм радиус такой окружности, дуга которой, содержащая* 81°21′36″, *равна* 0,452 *м.*

Обратив 81°21′36″ в секунды, получим число 292 896. Из уравнения

$$0{,}452=\frac{\pi R\cdot 292\,896}{180\cdot 60\cdot 60}$$

находим:

$$R=\frac{0{,}452\cdot 180\cdot 60\cdot 60}{292\,896\pi}=\frac{1}{\pi}\approx 0{,}318\ (\text{м}).$$

98(241). З а д а ч а. *Определить число градусов дуги, длина которой равна радиусу.*

Заменив в формуле, определяющей длину дуги в $n°$, величину s на R, получим уравнение:

$$R=\frac{\pi R n}{180}, \text{ или } 1=\frac{\pi n}{180},$$

откуда

$$n°=\frac{180°}{\pi}=180°\cdot\frac{1}{\pi}\approx 180°\cdot 0{,}3183098\approx 57°{,}295764\approx$$
$$\approx 57°17'44'',8.$$

Заметим, что дуга, р а в н а я радиусу, называется р а д и а н о м.

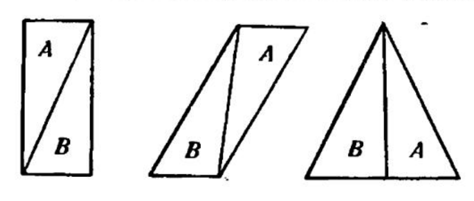
УПРАЖНЕНИЯ.

1. Доказать, что в двух кругах отношение центральных углов, соответствующих дугам, имеющим одинаковую длину, равно обратному отношению радиусов.

2. На окружности взята точка A и через неё проведены: диаметр AB, сторона правильного вписанного шестиугольника AC и касательная MN. Из центра O опущен на AC перпендикуляр и продолжен до пересечения с касательной в точке D. От этой точки отло-

мо, чтобы и площади фигур обладали соответствующим свойством. Поясним это. Положим, что, разбив данную фигуру на несколько частей, мы будем переставлять эти части и получать таким образом новые фигуры (подобно тому, как на чертеже 80 перемещены части *A* и *B*). Спрашивается: нельзя ли путём этих перестановок получить такую фигуру, которая могла бы целиком уместиться внутри первоначальной фигуры? Если бы это оказалось возможным, то получились бы две фигуры, лежащие одна внутри другой, причём числа, измеряющие их площади, в силу условия 2-го, были бы равны между собой.

Таким образом, число, измеряющее площадь всей фигуры, оказалось бы равным числу, измеряющему площадь лишь некоторой части этой фигуры, т. е. сумма была бы равна одному из слагаемых, что невозможно для положительных чисел. Следовательно, в этом случае условие



Черт. 80.

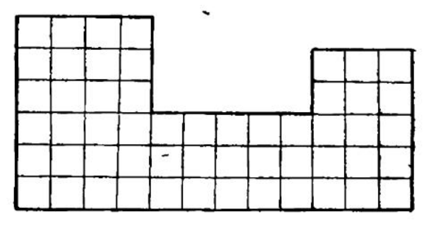
2-е не могло бы быть принято. Впервые обратил внимание на этот вопрос итальянский математик Децольт (1881). Невозможность указанной выше перестановки частей фигуры принималась вначале как некоторый постулат, но позднее эта невозможность была строго доказана Шуром, Киллингом, Шатуновским и Гильбертом. Это свойство площадей фигур и делает возможным принятие условия 2-го.

Фигуры, имеющие равные площади, принято называть **равновеликими.** Конечно, равные фигуры всегда и равновелики, но равновеликие фигуры могут быть неравными (как те, которые изображены на чертеже 80).

101(244). Понятие об измерении площади. Для измерения площади данной фигуры прежде всего выбирают единицу площади. За такую единицу берут площадь квадрата, у которого сторона равна линейной единице, например одному метру, одному сантиметру и т. п. Для фигур простейшего типа можно получить меру площади следующим образом. Накладываем единицу площади на измеряемую площадь столько раз, сколько это возможно. Это можно сделать для небольших площадей, которые можно начертить на бумаге, при помощи прозрачной миллиметровой бумаги, разделённой равноотстоящими параллельными прямыми на маленькие квадраты, принятые за единицу площади. Допустим, что на фигуру, площадь которой надо измерить, наложена такая сеть квадратов. Тогда, если контур

данной фигуры представляет собой ломаную линию (черт. 81), стороны которой совпадают с частями прямых линий, образующих сеть квадратов, то число квадратов, лежащих внутри фигуры, составит точную меру измеряемой площади.

В действительности измерение площадей производится не путём накладывания единицы площади или её доли, а косвенным путём, посредством измерения некоторых линий фигуры. Как это делается, мы увидим из следующих параграфов.



Черт. 81.

102(245). Основание и высота. Условимся одну из сторон треугольника или параллелограмма называть **основанием** этих фигур, а перпендикуляр, опущенный на эту сторону из вершины треугольника или из какой-нибудь точки противоположной стороны параллелограмма, будем называть **высотой**.

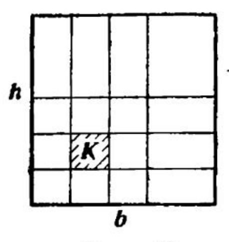
В прямоугольнике за высоту можно взять сторону, перпендикулярную к той, которая принята за основание.

В трапеции основаниями называют обе параллельные стороны, а высотой — общий перпендикуляр между ними.

Основание и высота прямоугольника называются его **измерениями**.

103(246). Теорема. ***Площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту.***

Это краткое предложение надо понимать так: число, выражающее площадь прямоугольника в квадратных единицах, равно произведению чисел, выражающих основание и высоту его в соответствующих линейных единицах.



Черт. 82.

При доказательстве могут представиться три случая:

1) Длины основания и высоты (измеренных одной и той же единицей) выражаются ц е л ы м и ч и с л а м и.

Пусть у данного прямоугольника (черт. 82) основание равно целому числу b линейных единиц, а высота — целому числу h тех же единиц. Разделим основание на b

и высоту на h равных частей, проведём через точки деления ряд прямых, параллельных высоте, и другой ряд прямых, параллельных основанию. От взаимного пересечения этих прямых образуются некоторые четырёхугольники Возьмём какой-нибудь один из них, например четырёхугольник K (покрытый на чертеже штрихами). Так как стороны этого четырёхугольника, по построению, параллельны соответствующим сторонам данного прямоугольника, то все углы его прямые; значит, четырёхугольник K есть прямоугольник. С другой стороны, каждая сторона этого прямоугольника равна расстоянию между соседними параллельными прямыми, т. е. равна одной и той же линейной единице. Значит, прямоугольник K представляет собой квадрат, а именно: ту квадратную единицу, которая соответствует взятой линейной единице (если, например, основание и высота были измерены линейными сантиметрами, то квадрат K есть квадратный сантиметр). Так как сказанное об одном четырёхугольнике справедливо и для всякого другого, то, значит, проведением указанных параллельных прямых мы разбиваем всю площадь данного прямоугольника на квадратные единицы. Найдём их число. Очевидно, что ряд прямых, параллельных основанию, разделяет прямоугольник на столько равных горизонтальных полос, сколько в высоте содержится линейных единиц, т. е. на h равных полос. С другой стороны, ряд прямых, параллельных высоте, разбивает каждую горизонтальную полосу на столько квадратных единиц, сколько в основании содержится линейных единиц, т. е. на b квадратных единиц. Значит, всех квадратных единиц окажется $b \cdot h$. Таким образом,

$$\text{площадь прямоугольника} = bh,$$

т. е. она равна произведению основания на высоту.

2) Длины основания и высоты (измеренных одной и той же единицей) выражаются дробными числами.

Пусть, например, у данного прямоугольника:

$$\text{основание} = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2} \text{ линейных единиц,}$$

$$\text{высота} = 4\frac{3}{5} = \frac{23}{5} \text{ той же единицы.}$$

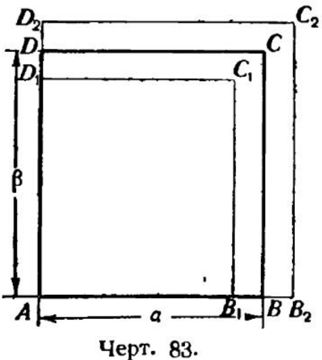
Приведя дроби к одинаковому знаменателю, получим:

$$\text{основание} = \frac{35}{10}; \text{ высота} = \frac{46}{10}.$$

Примем $\frac{1}{10}$ долю линейной единицы за новую единицу длины. Тогда мы можем сказать, что основание содержит 35 этих новых единиц, а высота 46 тех же единиц. Значит, по доказанному в случае 1-м, площадь прямоугольника равна 35·46 таких квадратных единиц, которые соответствуют новой единице длины. Но эта квадратная единица составляет $\frac{1}{100}$ часть квадратной единицы, соответствующей прежней линейной единице; значит, площадь прямоугольника в прежних квадратных единицах равна:

$$\frac{35\cdot 46}{100}=\frac{35}{10}\cdot\frac{46}{10}=3\frac{1}{2}\cdot 4\frac{3}{5}\text{ (квадратных единиц).}$$

3) Основание и высота (или только одно из этих измерений) несоизмеримы с единицей длины, и, следовательно, их длины выражаются иррациональными числами.



Черт. 83.

В этом случае можно довольствоваться приближённым результатом измерения площади с желаемой степенью точности.

Но можно и в этом случае найти точную меру площади прямоугольника. Пусть длина основания AB прямоугольника $ABCD$ (черт. 83) выражается иррациональным числом α, а длина высоты AD — иррациональным числом β. Каждое из этих чисел может быть представлено в виде бесконечной непериодической десятичной дроби [§ 7(150)]. Возьмём приближённые значения этих чисел в виде десятичных дробей с n десятичными знаками: сначала с недостатком, затем с избытком. Приближённые значения с недостатком обозначим через α_n (для первого числа) и β_n (для второго числа), а приближённые значения с избытком соответственно через α_n' и β_n'. Отложим на основании AB от точки A сначала отрезок AB_1, численная величина которого равна α_n, затем отрезок AB_2, численная величина которого равна α_n'. Очевидно, $AB_1 < AB$ и $AB_2 > AB$. Отложим, далее, на высоте AD от точки A отрезки AD_1 и AD_2, численные величины которых равны соответственно β_n и β_n'. Очевидно, $AD_1 < AD$ и $AD_2 > AD$.

Построим два вспомогательных прямоугольника $AB_1C_1D_1$ и $AB_2C_2D_2$. У каждого из них основание и высота выражаются рациональными числами:

$$AB_1 = \alpha_n, \quad AB_2 = \alpha'_n, \quad AD_1 = \beta_n, \quad AD_2 = \beta'_n.$$

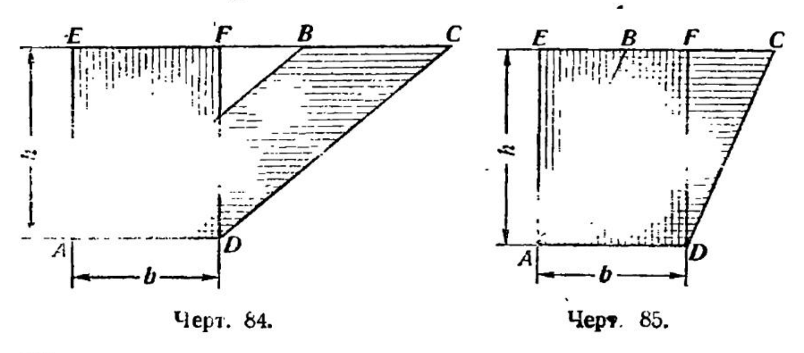
Поэтому согласно доказанному в случае 2-м

$$\text{площадь } AB_1C_1D_1 = \alpha_n\beta_n,$$
$$\text{площадь } AB_2C_2D_2 = \alpha'_n\beta'_n.$$

Будем теперь увеличивать n неограниченно. В таком случае α_n и α'_n будут иметь пределом иррациональное число α, а числа β_n и β'_n будут иметь пределом иррациональное число β. Произведения же $\alpha_n\beta_n$ и $\alpha'_n\beta'_n$, как известно из алгебры, имеют общий предел, называемый произведением чисел α и β [§ 11(154)].

Этот общий предел произведений $\alpha_n\beta_n$ и $\alpha'_n\beta'_n$, т. е. произведение $\alpha\beta$, и принимают за меру площади прямоугольника $ABCD$. Легко непосредственно убедиться, что эта мера удовлетворяет тем двум условиям, которым должно удовлетворять число, измеряющее площадь [§ 100(243)], именно: 1) числа, измеряющие площади равных прямоугольников, равны, 2) если прямоугольник разбить на несколько прямоугольников, то число, измеряющее площадь всего прямоугольника, будет равно сумме чисел, измеряющих площади составляющих прямоугольников. Таким образом, и в этом случае площадь прямоугольника равна произведению основания на высоту.

104(247). Теорема. ***Площадь параллелограмма*** ($ABCD$, черт. 84 и 85) ***равна произведению основания на высоту.***



Черт. 84. Черт. 85.

На основании AD (на том и другом чертежах) построим прямоугольник $AEFD$, у которого сторона EF составляет продолжение стороны BC.

При этом могут представиться два случая:

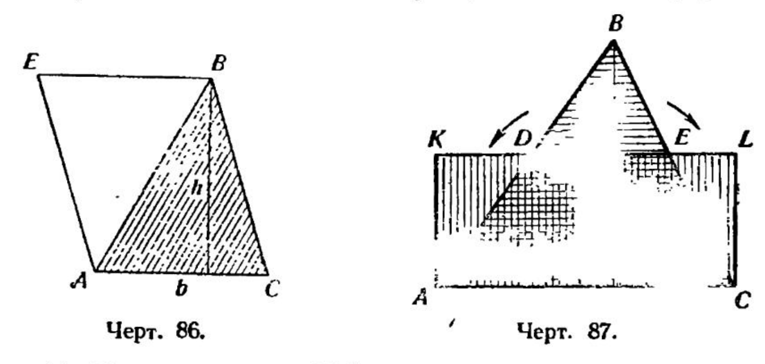
1) сторона BC лежит вне стороны EF и 2) сторона BC частью совпадает с EF (первый случай изображён на чертеже 84, второй — на чертеже 85). Докажем, что и в том и в другом случаях

$$\text{площадь } ABCD = \text{площади } AEFD.$$

Если параллелограмм дополним треугольником AEB, а прямоугольник дополним треугольником DFC, то мы получим одну и ту же трапецию $AECD$. Так как дополняющие треугольники равны (они имеют по две стороны и углу, заключённому между ними, соответственно равными), то параллелограмм и прямоугольник должны быть равновелики. Но площадь $AEFD = bh$; следовательно, и площадь $ABCD = bh$, причём b можно рассматривать как основание параллелограмма и h — как его высоту.

105(248). Теорема. ***Площадь треугольника*** (ABC, черт. 86) ***равна половине произведения основания на высоту.***

Проведём $BE \parallel AC$ и $AE \parallel BC$. Тогда получим параллелограмм $AEBC$, площадь которого, по доказанному, равна bh. Но площадь $\triangle ABC$ составляет половину площади $AEBC$; следовательно,



Черт. 86. Черт. 87.

$$\text{площадь } \triangle ABC = \frac{1}{2} b \cdot h.$$

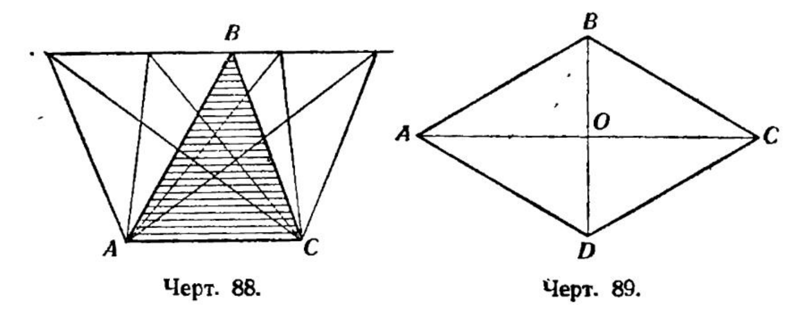
Замечание. Легко убедиться, что всякий треугольник разлагается на части, перемещением которых можно образо-

вать прямоугольник, имеющий одинаковое с треугольником основание и высоту, вдвое меньшую высоты треугольника (черт. 87).

106(249). Следствия. 1) *Треугольники с равными основаниями и равными высотами равновелики.*

Если, например, вершину B $\triangle ABC$ (черт. 88) будем перемещать по прямой, параллельной основанию AC, а основание оставим то же самое, то площадь треугольника не будет изменяться.

2) *Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов*, потому что один катет можно взять за основание, а другой — за высоту.



Черт. 88. Черт. 89.

3) *Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей*. Действительно, если $ABCD$ (черт. 89) есть ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны. Поэтому

$$\text{площадь } \triangle ABC = \frac{1}{2} AC \cdot OB,$$

$$\text{площадь } \triangle ACD = \frac{1}{2} AC \cdot OD,$$

$$\text{площадь } ABCD = \frac{1}{2} AC \cdot (OB + OD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

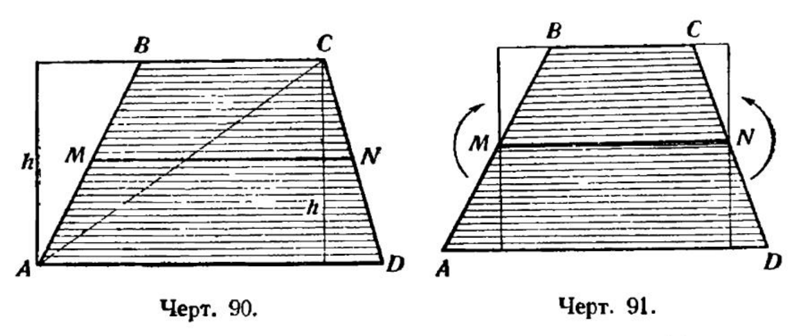
4) *Площади двух треугольников относятся, как произведения их оснований на высоты* $\left(\text{множитель } \frac{1}{2} \text{ сокращается}\right)$.

107(250). Теорема. ***Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.***

Проведя в трапеции $ABCD$ (черт. 90) диагональ AC, мы можем рассматривать её площадь как сумму площадей

двух треугольников CAD и ABC. Поэтому:

$$\text{площадь трапеции } ABCD = \frac{1}{2} AD \cdot h + \frac{1}{2} BC \cdot h = $$
$$= \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot h.$$



Черт. 90. Черт. 91.

108(251). Следствие. Если MN (черт. 91) есть средняя линия трапеции, то, как известно,

$$MN = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

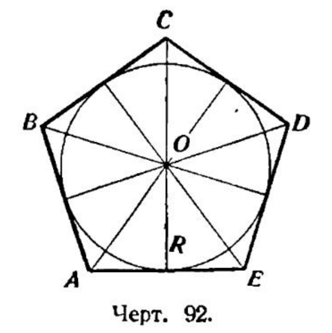
Поэтому

$$\text{площадь трапеции } ABCD = MN \cdot h,$$

т. е. *площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.*

Это же можно видеть и непосредственно из чертежа 91.

109(252). Теорема. ***Площадь всякого описанного многоугольника равна произведению периметра на половину радиуса.***



Черт. 92.

Соединив центр O (черт. 92) со всеми вершинами описанного многоугольника, мы разделим его на треугольники, в которых за основания можно взять стороны многоугольника, а за высоты — радиус круга.

Обозначив этот радиус через R, будем иметь:

площадь $\triangle AOB = AB \cdot \frac{1}{2} R$, площадь $\triangle BOC = BC \cdot \frac{1}{2} R$ и т. д.

Следовательно,

$$\text{площадь мн. } ABCDE=(AB+BC+CD+DE+EA)\cdot\frac{1}{2}R=$$
$$=P\cdot\frac{1}{2}R,$$

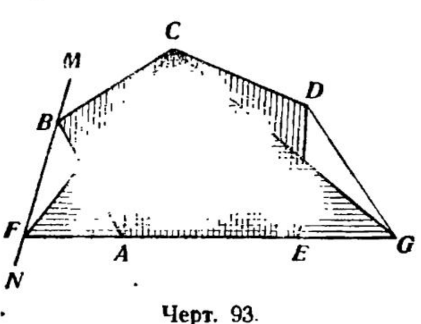
где буквой P обозначен периметр многоугольника.

Следствие. *Площадь правильного многоугольника равна произведению периметра на половину апофемы*, потому что всякий правильный многоугольник можно рассматривать как описанный около круга, у которого радиус есть апофема.

110(253). Площадь неправильного многоугольника. Для нахождения площади какого-нибудь неправильного многоугольника можно его разбить на треугольники (например диагоналями), вычислить площадь каждого треугольника в отдельности и результаты сложить.

111(254). Задача. *Построить треугольник, равновеликий данному многоугольнику* ($ABCDE$, черт. 93).

Какой-нибудь диагональю AC отсечём от данного многоугольника $\triangle ABC$. Через ту вершину B этого треугольника, которая лежит против взятой диагонали, проведём прямую $MN \parallel AC$. Затем продолжим одну из сторон EA или DC, прилежащих к отсечённому треугольнику, до пересечения с прямой MN (на чертеже продолжена сторона EA). Точку пересечения F соединим прямой с C. Треугольники CBA и CFA равновелики, так как у них общее основание AC, а вершины B и F лежат на прямой, параллельной основанию. Если от данного многоугольника отделим $\triangle CBA$ и вместо него приложим равновеликий ему $\triangle CFA$, то величина площади не изменится; следовательно, данный многоугольник равновелик многоугольнику $FCDE$, у которого, очевидно, число углов на единицу меньше, чем у данного многоугольника. Таким же приёмом можно число углов полученного многоугольника умень-



Черт. 93.

шить ещё на единицу и продолжать такое последовательное уменьшение до тех пор, пока не получится треугольник (FCG на нашем чертеже).

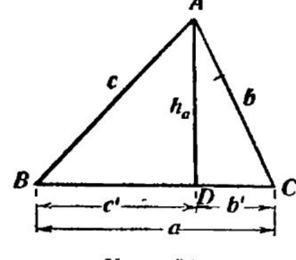
112(255). Задача. *Построить квадрат, равновеликий данному многоугольнику.*

Сначала преобразовывают многоугольник в равновеликий треугольник, а затем этот треугольник — в квадрат. Пусть основание и высота треугольника b и h, а сторона искомого квадрата x. Тогда площадь первого равна $\frac{1}{2}bh$, а второго x^2; следовательно,

$$\frac{1}{2}bh = x^2, \text{ откуда } \frac{1}{2}b : x = x : h,$$

т. е. x есть средняя пропорциональная между $\frac{1}{2}b$ и h. Значит, сторону квадрата можно построить способом, указанным раньше [§ 47(190)] для нахождения средней пропорциональной.

Замечание. Преобразование данного многоугольника в треугольник не всегда необходимо. Например, если речь идёт о преобразовании в квадрат данной трапеции, то достаточно найти среднюю пропорциональную между высотой трапеции и её средней линией и на полученном отрезке построить квадрат.



Черт. 94.

113(256). Задача. *Вычислить площадь S треугольника, зная длины a, b и c его сторон.*

Пусть высота $\triangle ABC$ (черт. 94), опущенная на сторону a, есть h_a. Тогда

$$S = \frac{1}{2}ah_a.$$

Чтобы найти высоту h_a, возьмём равенство [§ 51(194)]:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac'$$

и определим из него отрезок c':

$$c' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Из $\triangle ABD$ находим:

$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}.$$

Преобразуем подкоренное выражение так:

$$(2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 =$$
$$= (2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2) =$$
$$= [(a^2 + c^2 + 2ac) - b^2][b^2 - (a^2 + c^2 - 2ac)] =$$
$$= [(a + c)^2 - b^2][b^2 - (a - c)^2] =$$
$$= (a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c).$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}\ ^{1)}.$$

Если положим, что $a + b + c = 2p$, то

$$a + c - b = (a + b + c) - 2b = 2p - 2b = 2(p - b).$$

Подобно этому

$$b + a - c = 2(p - c);$$
$$b + c - a = 2(p - a).$$

Тогда

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2p \cdot 2(p - a) \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c)},$$

т. е.

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Это выражение известно под названием **формулы Герона** (по имени математика Герона из Александрии, жившего приблизительно в III—II веках до начала нашей эры).

Частный случай. Площадь равностороннего треугольника со стороной a выражается следующей формулой:

$$S = \sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Теорема Пифагора и основанные на ней задачи.

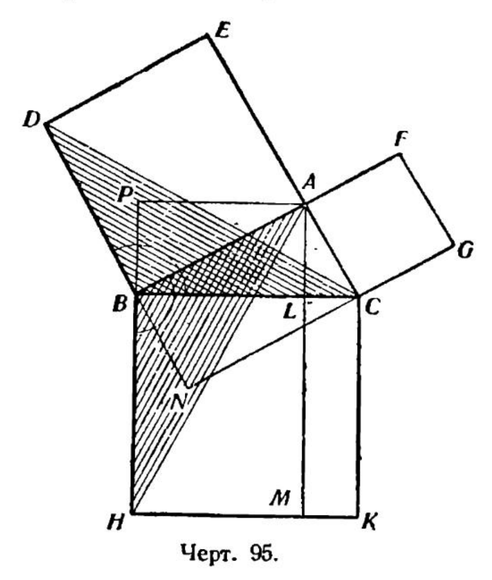
114(257). Теорема. ***Сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе этого треугольника.***

Это предложение является другой формой теоремы Пифагора, доказанной ранее [§ 48(191)]: *квадрат числа,*

[1]) Так как в треугольнике сумма любых двух сторон больше третьей, то все разности $a + b - c$, $a + c - b$ и $b + c - a$ — числа положительные.

измеряющего длину гипотенузы, равен сумме квадратов чисел, измеряющих длины катетов. Действительно, квадрат числа, измеряющего длину отрезка, и является мерой площади квадрата, построенного на этом отрезке. Поэтому теорема § 48(191) равносильна указанной теореме Пифагора.

Приведём другое доказательство теоремы Пифагора, основанное не на вычислении площадей, а на непосредственном их сравнении между собой.



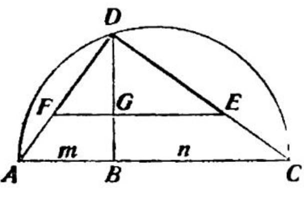
Черт. 95.

Доказательство (Эвклида). Пусть ABC (черт. 95) — прямоугольный треугольник, а $BDEA$, $AFGC$ и $BCKH$ — квадраты, построенные на его катетах и гипотенузе; требуется доказать, что сумма площадей двух первых квадратов равна площади третьего квадрата.

Проведём $AM \perp BC$. Тогда квадрат $BCKH$ разделится на два прямоугольника. Докажем, что прямоугольник $BLMH$ равновелик квадрату $BDEA$, а прямоугольник $LCKM$ равновелик квадрату $AFGC$.

Проведём вспомогательные прямые DC и AH. Рассмотрим два треугольника, покрытые на чертеже штрихами. $\triangle DCB$, имеющий основание BD, общее с квадратом $BDEA$, а высоту CN, равную высоте AB этого квадрата, равновелик половине квадрата. $\triangle ABH$, имеющий основание BH,

общее с прямоугольником $BLMH$, и высоту AP, равную высоте BL этого прямоугольника, равновелик половине его. Сравнивая эти два треугольника между собой, находим, что у них $BD = BA$ и $BC = BH$ (как стороны квадрата); сверх того $\angle DBC = \angle ABH$, так как каждый из этих углов состоит из общей части — $\angle ABC$ и прямого угла. Значит, треугольники ABH и BDC равны. Отсюда следует, что прямоугольник $BLMN$ равновелик квадрату $BDEA$. Соединив G с B и A с K, мы совершенно так же докажем, что прямоугольник $LCKM$ равновелик квадрату $AFGC$. Отсюда следует, что квадрат $BCKH$ равновелик сумме квадратов $BDEA$ и $AFGC$.



Черт. 96.

115(258). Задачи. 1) *Построить квадрат, площадь которого равна сумме площадей двух данных квадратов.*

Строим прямоугольный треугольник, у которого катетами были бы стороны данных квадратов. Квадрат, построенный на гипотенузе этого треугольника, имеет площадь, равную сумме площадей данных квадратов.

2) *Построить квадрат, площадь которого равна разности площадей двух данных квадратов.*

Строим прямоугольный треугольник, у которого гипотенузой была бы сторона большего из данных квадратов, а катетом — сторона меньшего квадрата. Квадрат, построенный на другом катете этого треугольника, является искомым.

3) *Построить квадрат, площадь которого относится к площади данного квадрата, как $m : n$.*

На произвольной прямой (черт. 96) откладываем $AB = m$ и $BC = n$ и на AC, как на диаметре, описываем полуокружность. Из точки B восставляем перпендикуляр BD до пересечения с окружностью. Проведя хорды AD и DC, получим прямоугольный треугольник, у которого [§49(192)]:

$$AD^2 : DC^2 = AB : BC = m : n.$$

На катете DC этого треугольника отложим отрезок DE, равный стороне данного квадрата, и проведём $EF \parallel CA$[1]).

---

[1]) Если сторона данного квадрата больше DC, то точки E и F будут лежать на продолжениях катетов DC и DA.

Отрезок DF есть сторона искомого квадрата, потому что

$$\frac{DF}{DE}=\frac{AD}{DC}, \text{ откуда } \left(\frac{DF}{DE}\right)^2=\left(\frac{AD}{DC}\right)^2;$$

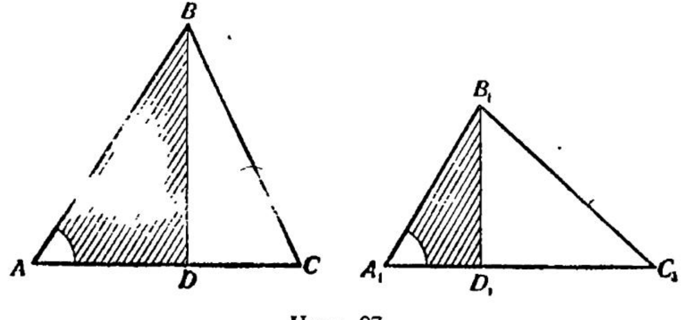
следовательно,

$$DF^2 : DE^2 = AD^2 : DC^2 = m : n.$$

Отношение площадей подобных фигур.

116(259). Теорема. ***Площади двух треугольников, имеющих по равному углу, относятся, как произведения сторон, заключающих эти углы.***

Пусть (черт. 97) в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы A и A_1 равны.



Черт. 97.

Проведя высоты BD и B_1D_1, будем иметь:

$$\frac{\text{площадь } ABC}{\text{площадь } A_1B_1C_1}=\frac{AC\cdot BD}{A_1C_1\cdot B_1D_1}=\frac{AC}{A_1C_1}\cdot\frac{BD}{B_1D_1}.$$

Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ подобны ($\angle A=\angle A_1$ и $\angle D=\angle D_1$), поэтому отношение $BD:B_1D_1$ равно отношению $AB:A_1B_1$; заменив первое отношение вторым, получим:

$$\frac{\text{площадь } ABC}{\text{площадь } A_1B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}\cdot\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC\cdot AB}{A_1C_1\cdot A_1B_1}.$$

117(260). Теорема. ***Площади подобных треугольников или многоугольников относятся, как квадраты сходственных сторон.***

1) Если ABC и $A_1B_1C_1$ — два подобных треугольника, то углы одного равны соответственно углам другого; пусть

$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $\angle C = \angle C_1$. Применим к ним предыдущую теорему:

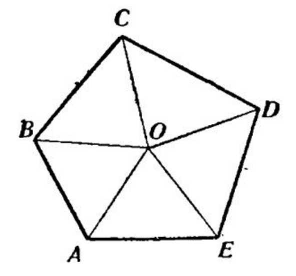
$$\frac{\text{площадь } ABC}{\text{площадь } A_1B_1C_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1}. \quad (1)$$

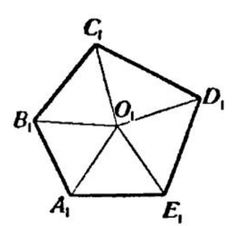
Но из подобия треугольников следует:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}. \quad (2)$$

Поэтому в равенстве (1) мы можем каждое из отношений $\frac{AB}{A_1B_1}$ и $\frac{AC}{A_1C_1}$ заменить любым отношением ряда (2); следовательно,

$$\frac{\text{площадь } ABC}{\text{площадь } A_1B_1C_1} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{AC}{A_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 =$$
$$= \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = \frac{AC^2}{A_1C_1^2} = \frac{BC^2}{B_1C_1^2}.$$





Черт. 98.

2) Если $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (черт. 98) — два подобных многоугольника, то их можно, как мы видели [§ 28(171)], разложить на одинаковое число подобных и одинаково расположенных треугольников. Пусть эти треугольники будут: AOB и $A_1O_1B_1$, BOC и $B_1O_1C_1$ и т. д. Согласно доказанному в первой части этой теоремы мы получим пропорции:

$$\frac{\text{площадь } AOB}{\text{площадь } A_1O_1B_1} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2; \quad \frac{\text{площадь } BOC}{\text{площадь } B_1O_1C_1} = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 \text{ и т. д.}$$

Но из подобия многоугольников следует:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \ldots$$

и потому

$$\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{CD}{C_1D_1}\right)^2 = \dots .$$

Значит,

$$\frac{\text{площадь } AOB}{\text{площадь } A_1O_1B_1} = \frac{\text{площадь } BOC}{\text{площадь } B_1O_1C_1} = \frac{\text{площадь } COD}{\text{площадь } C_1O_1D_1} = \dots ,$$

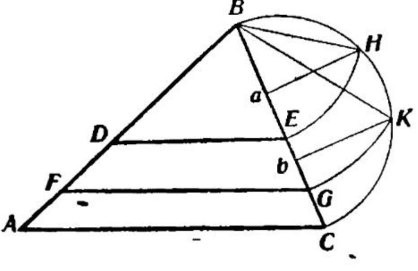
откуда

$$\frac{\text{площадь } AOB + \text{площадь } BOC + \text{площадь } COD + \dots}{\text{площадь } A_1O_1B_1 + \text{площадь } B_1O_1C_1 + \text{площадь } C_1O_1D_1 + \dots} =$$

$$= \frac{\text{площадь } ABCDE}{\text{площадь } A_1B_1C_1D_1E_1} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2}.$$

Следствие. *Площади правильных одноимённых многоугольников относятся, как квадраты сторон, или как квадраты радиусов описанных окружностей, или как квадраты апофем.*

118(261). Задача. *Разделить данный треугольник на m равновеликих частей прямыми, параллельными его стороне.*



Черт. 99.

Пусть, например, требуется разделить $\triangle ABC$ (черт. 99) на три равновеликие части отрезками, параллельными основанию AC.

Предположим, что искомые отрезки будут DE и FG. Очевидно, что если мы найдём отрезки BE и BG, то определятся и отрезки DE и FG. Треугольники BDE, BFG и BAC подобны; поэтому

$$\frac{\text{площадь } BDE}{\text{площадь } BAC} = \frac{BE^2}{BC^2} \text{ и } \frac{\text{площадь } BFG}{\text{площадь } BAC} = \frac{BG^2}{BC^2}.$$

Но

$$\frac{\text{площадь } BDE}{\text{площадь } BAC} = \frac{1}{3} \text{ и } \frac{\text{площадь } BFG}{\text{площадь } BAC} = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$\frac{BE^2}{BC^2} = \frac{1}{3} \text{ и } \frac{BG^2}{BC^2} = \frac{2}{3},$$

откуда

$$BE = \sqrt{\frac{1}{3}BC^2} = \sqrt{\frac{1}{3}BC \cdot BC}$$

и

$$BG = \sqrt{\frac{2}{3}BC^2} = \sqrt{\frac{2}{3}BC \cdot BC}.$$

Из этих выражений видим, что BE есть средняя пропорциональная между BC и $\frac{1}{3}BC$, а BG есть средняя пропорциональная между BC и $\frac{2}{3}BC$. Поэтому построение можно выполнить так: разделим BC на три равные части в точках a и b; опишем на BC полуокружность; из a и b восставим к BC перпендикуляры aH и bK. Хорды HB и KB будут искомыми средними пропорциональными; первая — между всем диаметром BC и его третьей частью Ba, вторая — между BC и Bb, т. е. между BC и $\frac{2}{3}BC$. Остаётся отложить эти хорды на BC от точки B, тогда получим искомые точки E и G. Подобным образом можно разделить треугольник на какое угодно число равновеликих частей.

II. ПЛОЩАДЬ КРУГА И ЕГО ЧАСТЕЙ.

119(262). Лемма. ***При неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника сторона его может сделаться как угодно малой.***

Пусть n есть число сторон правильного вписанного многоугольника и p — его периметр; тогда длина одной стороны этого многоугольника выразится дробью $\frac{p}{n}$. При неограниченном удвоении числа сторон многоугольника знаменатель этой дроби будет, очевидно, возрастать неограниченно, а числитель, т. е. p, хотя и будет возрастать, но не беспредельно (так как периметр всякого вписанного выпуклого многоугольника всегда остаётся меньшим периметра любого описанного многоугольника). Если же в какой-нибудь дроби знаменатель неограниченно возрастает, а числитель остаётся меньше некоторой постоянной величины, то дробь эта может сделаться как угодно малой. Значит, то же самое можно сказать о стороне правильного вписанного многоугольника: при неограниченном удвоении числа сторон она может сделаться как угодно малой.

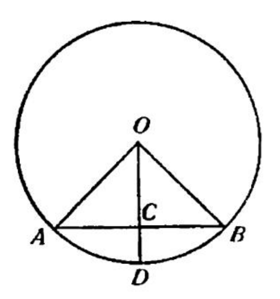
120(263). Следствие. Пусть (черт. 100) AB есть сторона правильного вписанного многоугольника, OA — радиус и OC — апофема. Из $\triangle OAC$ находим:

$$OA - OC < AC,$$

т. е.

$$OA - OC < \frac{1}{2} AB.$$

Но при неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника сторона его, как мы сейчас доказали, может сделаться как угодно малой; значит, то же самое можно сказать и о разности $OA - OC$. Таким образом, при неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника *разность между радиусом и апофемой может сделаться как угодно малой*. Это же можно высказать другими словами так: при неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника *предел, к которому стремится апофема, есть радиус*.



Черт. 100.

121(264). Площадь круга. Впишем в круг, радиус которого обозначим через R, какой-нибудь правильный многоугольник. Пусть

площадь	этого	многоугольника	будет	q,
периметр	»	»	»	p,
апофема	»	»	»	a.

Мы видели [§ 109(252), следствие], что между этими величинами есть такая зависимость:

$$q = \frac{1}{2} p \cdot a.$$

Вообразим теперь, что число сторон этого многоугольника неограниченно удваивается. Тогда периметр p и апофема a (следовательно и площадь q) будут увеличиваться, причём периметр будет стремиться к пределу, принимаемому за длину C окружности, апофема будет стремиться к пределу, равному радиусу R круга. Из этого следует, что площадь многоугольника, увеличиваясь при удвоении числа сторон, будет стремиться к пределу, рав-

ному $\frac{1}{2}C \cdot R$. Предел этот принимается за численную величину площади круга. Таким образом, обозначив площадь круга буквой K, можем написать:

$$K = \frac{1}{2}C \cdot R,$$

т. е. *площадь круга равна половине произведения длины окружности на радиус.*

Так как $C = 2\pi R$, то

$$K = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2,$$

т. е. *площадь круга равна квадрату радиуса, умноженному на отношение длины окружности к диаметру.*

122(265). Следствие. *Площади кругов относятся, как квадраты радиусов или диаметров.*

Действительно, если K и K_1 будут площади двух кругов, а R и R_1 — их радиусы, то

$$K = \pi R^2$$

и

$$K_1 = \pi R_1^2,$$

откуда

$$\frac{K}{K_1} = \frac{\pi R^2}{\pi R_1^2} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{4R^2}{4R_1^2} = \frac{(2R)^2}{(2R_1)^2}.$$

123(266). Задача 1. *Вычислить площадь круга, длина окружности которого равна 2 м.*

Для этого предварительно найдём радиус R из равенства:

$$2\pi R = 2,$$

откуда

$$R = \frac{1}{\pi} = 0{,}3183\ldots .$$

Затем определим площадь круга:

$$K = \pi R^2 = \pi\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{\pi} = 0{,}3183\ldots\ м^2.$$

124(267). Задача 2. *Построить квадрат, равновеликий данному кругу.*

Эта задача, известная под названием квадратуры круга, не может быть решена при помощи циркуля и линейки. Действительно, если обозначим буквой x сторону искомого квадрата, а буквой R — радиус круга, то получим уравнение:

$$x^2 = \pi R^2,$$

откуда

$$\pi R : x = x : R,$$

т. е. x есть средняя пропорциональная между полуокружностью и радиусом. Следовательно, если известен отрезок, длина которого равна длине полуокружности, то легко построить квадрат, равновеликий данному кругу, и обратно: если известна сторона квадрата, равновеликого кругу, то можно построить отрезок, равный по длине полуокружности. Но с помощью циркуля и линейки нельзя построить отрезок, длина которого равнялась бы длине полуокружности; следовательно, нельзя в точности решить задачу о построении квадрата, равновеликого кругу. Приближённое решение можно выполнить, если предварительно найти приближённую длину полуокружности и затем построить среднюю пропорциональную между отрезком этой длины и радиусом.

Черт. 101.

125(268). Т е о р е м а. ***Площадь сектора равна произведению длины его дуги на половину радиуса.***

Пусть дуга AB (черт. 101) сектора AOB содержит n°. Очевидно, что площадь сектора, дуга которого содержит 1°, составляет $\frac{1}{360}$ часть площади круга, т. е. она равна $\frac{\pi R^2}{360}$. Следовательно, площадь S сектора, дуга которого содержит n°, равна:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi R n}{180} \cdot \frac{R}{2}.$$

Так как дробь $\frac{\pi R n}{180}$ выражает длину дуги AB [§ 96(239)], то, обозначив её буквой s, получим:

$$S = s \cdot \frac{R}{2}.$$

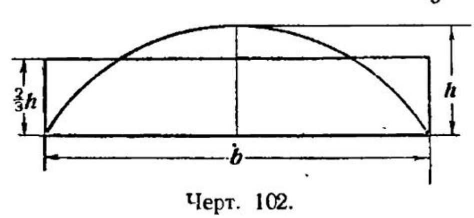
126(269). Площадь сегмента. Для нахождения площади сегмента, ограниченного дугой s и хордой AB (черт. 101), надо отдельно вычислить площадь сектора $AOBsA$ и площадь треугольника AOB и из первой вычесть вторую.

Впрочем, когда градусное измерение дуги s невелико, площадь сегмента можно вычислять по следующей п р и-

ближённой формуле (мы её приводим без доказательства):

$$\text{площадь сегмента} = \frac{2}{3} bh, \qquad (1)$$

где b есть основание сегмента (черт. 102), а h — его высота (обыкновенно называемая стрелкой сегмента). Доказано, что погрешность результата вычисления, получаемого по этой приближённой формуле, тем меньше, чем меньше отношение $h : b$; так, если h меньше $\frac{1}{9} b$ (что бывает



Черт. 102.

тогда, когда дуга s содержит меньше 50°), то погрешность оказывается меньше 1% площади.

Более точные результаты даёт более сложная формула:

$$\text{площадь сегмента} = \frac{2}{3} bh + \frac{h^3}{2b}. \qquad (2)$$

УПРАЖНЕНИЯ.

Доказать теоремы.

1. В параллелограмме расстояния любой точки диагонали от двух прилежащих сторон обратно пропорциональны этим сторонам.

2. Площадь трапеции равна произведению одной из непараллельных сторон на перпендикуляр, опущенный из середины другой непараллельной стороны на первую.

3. Два четырёхугольника равновелики, если у них равны соответственно диагонали и угол между ними.

4 Если площади двух треугольников, прилежащих к основаниям трапеции и образуемых пересечением её диагоналей, равны соответственно p^2 и q^2, то площадь всей трапеции равна $(p + q)^2$.

5. Площадь правильного вписанного шестиугольника равна $\frac{3}{4}$ площади правильного описанного шестиугольника.

6. В четырёхугольнике $ABCD$ через середину диагонали BD проведена прямая, параллельная другой диагонали AC. Эта прямая пересекает сторону AD в точке E. Доказать, что отрезок CE делит четырёхугольник пополам.

7. Если медианы треугольника взять за стороны другого треугольника, то площадь последнего равна $\frac{3}{4}$ площади первого.

8. В круге с центром O проведена хорда AB. На радиусе OA, как на диаметре, описана окружность. Доказать, что площади двух сегментов, отсекаемых хордой AB от обоих кругов, относятся, как 4 : 1.

Задачи на вычисление.

9. Вычислить площадь прямоугольной трапеции, у которой один из углов равен 60°, зная или оба основания, или одно основание и высоту, или одно основание и боковую сторону, наклонную к основанию.

10. Даны основания трапеции B и b и её высота H. Вычислить высоту треугольника, образованного продолжением непараллельных сторон трапеции до взаимного пересечения.

11. В треугольник вписан другой треугольник, вершины которого делят пополам стороны первого треугольника; в другой треугольник вписан подобным же образом третий; в третий — четвёртый и т. д. неограниченно. Найти предел суммы площадей этих треугольников.

12. По трём данным сторонам a, b и c треугольника вычислить радиус r круга, вписанного в этот треугольник.

Указание. Если S есть площадь треугольника, то легко усмотреть, что

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = pr,$$

где p означает полупериметр треугольника. С другой стороны, площадь S выражается формулой, выведенной в § 113(256). Отсюда можно получить формулу для r.

13. Вычислить стрелку (высоту) и площадь сегмента в зависимости от радиуса r круга, если центральный угол, соответствующий сегменту, содержит 60°. Вычисление это произвести трояким путём: 1) посредством вычитания из площади сектора площади треугольника; 2) по первой приближённой формуле, указанной в § 126(269) этой книги, и 3) по второй приближённой формуле, указанной там же. Сравните результаты вычисления друг с другом с целью определить абсолютную и относительную погрешности приближённых результатов.

Решение:

$$b = r;$$

$$h = r - \frac{1}{2}r\sqrt{3} = \frac{1}{2}r(2-\sqrt{3}) \approx 0{,}1340r;$$

1) площадь $p_1 = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = r^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 0{,}0906r^2;$

2) площадь $p_2 = \frac{2}{3}bh \approx \frac{2}{3}\cdot r\cdot 0{,}1340r \approx 0{,}0893r^2;$

3) площадь $p_3 = \frac{2}{3}bh + \frac{h^3}{2b} \approx 0{,}0893r^2 + 0{,}0012r^2 = 0{,}0905r^2.$

Абсолютная погрешность:

для площади $p_2 = 0{,}0906r^2 - 0{,}0893r^2 = 0{,}0013r^2;$
для площади $p_3 = 0{,}0906r^2 - 0{,}0905r^2 = 0{,}0001r^2.$

Относительная погрешность (т. е. отношение абсолютной погрешности к измеряемой величине):

для площади $p_2 = \frac{p_1 - p_2}{p_1} = \frac{0{,}0013r^2}{0{,}0906r^2} \approx 0{,}014 = 1{,}4\%;$

для площади $p_3 = \frac{p_1 - p_3}{p_1} = \frac{0{,}0001r^2}{0{,}0906r^2} \approx 0{,}001 = 0{,}1\%.$

Таким образом, результат, вычисленный по первой приближённой формуле, меньше истинного результата (приблизительно) на 1,4%, а результат, вычисленный по второй приближённой формуле, меньше истинного на 0,1%.

14. 1) Зная основание b сегмента и высоту его (стрелку) h, вычислить радиус r круга.

Указание. Из прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза есть r, один катет $\frac{b}{2}$, а другой $r-h$, находим уравнение:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (r-h)^2 = r^2,$$

из которого легко определить r.

2) Вычислить диаметр круга, если известно, что при основании сегмента, равном 67,2 *см*, стрелка его составляет 12,8 *см* (см. предыдущее указание).

Задачи на построение.

15. Разделить треугольник прямыми, проходящими через его вершину, на три части, площади которых относятся, как $m:n:p$.

16. Разделить треугольник на две равновеликие части прямой, проходящей через данную точку его стороны.

17. Найти внутри треугольника такую точку, чтобы прямые, соединяющие её с вершинами треугольника, делили его на три равновеликие части.

Указание. Разделим сторону AC на 3 равные части в точках D и E. Через D проведём прямую, параллельную AB, и через E — прямую, параллельную BC. Точка пересечения этих прямых — искомая.

18. То же — на три части в отношении $2:3:4$ (или вообще $m:n:p$).

19. Разделить параллелограмм на три равновеликие части прямыми, исходящими из вершины его.

20. Разделить параллелограмм на две части прямой, проходящей через данную точку, так, чтобы их площади относились, как $m:n$.

Указание. Среднюю линию параллелограмма разделить в отношении $m:n$ и точку деления соединить прямой с данной точкой.

21. Разделить параллелограмм на три равновеликие части прямыми, параллельными диагонали

22. Разделить площадь треугольника в среднем и крайнем отношении прямой, параллельной основанию.

Указание. Решается приложением алгебры к геометрии.

23. Разделить треугольник на три равновеликие части прямыми, перпендикулярными к основанию.

24. Разделить круг на 2, на 3, ... равновеликие части концентрическими окружностями.

25. Разделить трапецию на две равновеликие части прямой, параллельной основаниям.

Указание. Продолжив непараллельные стороны до взаимного пересечения, взять за неизвестную величину расстояние конца искомой линии до вершины треугольника; составить пропорции, исходя из площадей подобных треугольников.

26. Данный прямоугольник преобразовать в другой равновеликий прямоугольник с данным основанием.

27. Построить квадрат, равновеликий $\frac{2}{3}$ данного квадрата.

28. Преобразовать квадрат в равновеликий прямоугольник, у которого сумма или разность d двух смежных сторон дана.

29. Построить круг, равновеликий кольцу, заключённому между двумя данными концентрическими окружностями.

30. Построить треугольник, подобный одному и равновеликий другому из двух данных треугольников.

31. Данный треугольник преобразовать в равновеликий равносторонний треугольник (посредством приложения алгебры к геометрии).

32. В данный круг вписать прямоугольник с данной площадью m^2 (посредством приложения алгебры к геометрии).

33. В данный треугольник вписать прямоугольник с данной площадью m (приложением алгебры к геометрии; исследовать).

ТАБЛИЦА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ УГЛОВ ОТ 0 ДО 90° ЧЕРЕЗ КАЖДЫЙ ГРАДУС.

Градусы	Синусы	Косинусы	Тангенсы	Котангенсы	Градусы
0	0,00000	1,00000	0,00000	∞	90
1	0,01745	0,99985	0,01746	57,28996	89
2	0,03490	0,99939	0,03492	28,63625	88
3	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	87
4	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	86
5	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	85
6	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	84
7	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	83
8	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	82
9	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	81
10	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	80
11	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	79
12	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	78
13	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	77
14	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	76
15	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	75
16	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	74
17	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	73
18	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	72
19	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	71
20	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	70
21	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	69
22	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	68
23	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	67
24	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	66
25	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	65
26	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	64
27	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	63
28	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	62
29	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	61
30	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	60
31	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	59
32	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	58
33	0,54464	0,83867	0,64941	1,53987	57
34	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	56
35	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	55
36	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	54
37	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	53
38	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	52
39	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	51
40	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	50
41	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	49
42	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	48
43	0,68200	0,73135	0,93252	1,07237	47
44	0,69466	0,71134	0,96569	1,03553	46
45	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	45
	Косинусы	Синусы	Котангенсы	Тангенсы	

Некоторые числа, часто употребляемые при решении задач.

$\pi \approx 3{,}1416 \left(\text{около } 3\frac{1}{7}\right)$; $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}01745$; $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$;

$\sqrt{5} \approx 2{,}2361$; $\frac{1}{\pi} \approx 0{,}3183$; $\frac{180^\circ}{\pi}$ (радиан) $\approx 57^\circ17'44'',8$;

$\sqrt{3} \approx 1{,}7321$; $\sqrt{6} \approx 2{,}4495$.

Н. РЫБКИН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

ДЛЯ 8 и 9 КЛАССОВ

§ 1(8). Свойство биссектрисы в треугольнике.

1. BD — биссектриса угла B в треугольнике ABC. Требуется определить:

1) отрезки AD и DC, если $AB = 10$ *м*, $BC = 15$ *м* и $AC = 20$ *м*;

2) сторону BC, если $AD : DC = 8 : 5$ и $AB = 16$ *м*;

3) сторону AC, если $AB : BC = 2 : 7$ и $DC - AD = 1$ *м*.

2. Угол треугольника, заключённый между сторонами в 9 *см* и 6 *см*, разделён пополам. Один из отрезков третьей стороны оказался равным одной из данных сторон. Определить третью сторону.

3. D — точка на стороне BC в треугольнике ABC. Узнать, делит ли прямая AD угол A пополам:

1) если $AB = 12$ *см*, $AC = 15$ *см*, $BD = 8$ *см* и $DC = 10$ *см*;

2) если $AB = 12$ *м*, $AC = 56$ *м* и $BD : DC = 14 : 3$;

3) если $AB = \frac{5}{11} AC$, $BD = 2$ *м* и $DC = 4{,}5$ *м*;

4) если $AB = 6$ *м*, $AC = 28$ *м* и $BD = \frac{3}{17} BC$.

4. В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что вершины D, E и F лежат соответственно на сторонах AB, BC и AC. Определить отрезки BE и EC, если $AB = 14$ *см*, $BC = 12$ *см* и $AC = 10$ *см*.

5. Стороны треугольника равны 51 *см*, 85 *см* и 104 *см*. Проведена окружность, которая касается обеих меньших сторон, а центр имеет на большей стороне. На какие части бо́льшая сторона делится центром?

6. В равнобедренном треугольнике высота равна 20 *см*, а основание относится к боковой стороне, как 4 : 3. Определить радиус вписанного круга.

7. В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении 12 : 5, а боковая сторона равна 60 *см*. Определить основание.

8. В равнобедренном треугольнике радиус вписанного круга составляет $\frac{2}{7}$ высоты, а периметр этого треугольника равен 56 *см*. Определить его стороны.

9. Хорда $AB = 15$ *м*, хорда $AC = 21$ *м* и хорда $BC = 24$ *м*. Точка D — середина дуги CB. На какие части BE и EC делится хорда BC прямой AED?

10. В треугольнике ABC даны стороны a, b и c. BD — биссектриса угла B; O — точка пересечения BD и биссектрисы угла C. Требуется определить отношение $OD : OB$.

11. В треугольнике ABC сторона $AB = 15$ *см* и $AC = 10$ *см*; AD — биссектриса угла A; из точки D проведена прямая, параллельная AB, до пересечения с AC в точке E. Определить AE, EC и DE.

12. В равнобедренном треугольнике ABC сторона $AC = b$, сторона $BA = BC = a$; AN и CM — биссектрисы углов A и C. Определить длину MN.

§ 2(9). Подобие треугольников и многоугольников.

Подобные треугольники.

1. Стороны треугольника относятся, как 4 : 5 : 6; меньшая сторона подобного ему треугольника равна 0,8 *м*. Определить другие стороны второго треугольника.

2. Стороны треугольника относятся, как 2 : 5 : 4; периметр подобного ему треугольника равен 55 *м*. Определить стороны второго треугольника.

3. Длина тени, отбрасываемой фабричной трубой, равняется 35,8 *м*; в то же время вертикально воткнутый в землю кол длиной в 1,9 *м* даёт тень длиной в 1,62 *м*. Найти высоту трубы.

4. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано, что $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$. Решить для этих треугольников следующие задачи:

1) дано: $a = 10$; $b = 14$: $a_1 = 25$; $c_1 = 20$. Определить c и b_1;

2) дано: $a = 35$; $a_1 = 21$; $c - c_1 = 8$. Определить c.

5. В треугольниках ABC и DEF $\angle A = \angle E$ и $\angle B = \angle D$. Сторона $AB = 16$ *см*; $BC = 20$ *см*; $DE = 12$ *см*; $AC - EF = 6$ *см*. Определить AC, EF и DF.

6. В двух равнобедренных треугольниках углы при вершине равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны 17 *см* и 10 *см*; основание другого равно 8 *см*. Определить его боковую сторону.

7. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано, что $\angle B = \angle B_1$ и что стороны первого треугольника, заключающие угол B, в 2,5 раза больше сторон второго треугольника, заключающих угол B_1. Определить AC и A_1C_1, если их сумма равна 4,2 *м*.

8. В треугольниках ABC и DEF имеется: $\angle B = \angle D$, $AB = \frac{4}{3} DE$ и $DF = 0{,}75BC$. Определить AC и EF, если их разность равна 5 *см*.

9. Узнать, подобны ли треугольники, если стороны их таковы:

1) 1 *м*, 1,5 *м* и 2 *м*; 10 *см*, 15 *см* и 20 *см*;

2) 1 *м*, 2 *м* и 15 *дм*; 12 *дм*, 8 *дм* и 16 *дм*;

3) 1 *м*, 2 *м* и 1,25 *м*; 10 *см*, 9 *см* и 16 *см*.

10. 1) В $\triangle ABC$ сторона $AB = 15$ *м* и $AC = 20$ *м*; на стороне AB отложен отрезок $AD = 10$ *м*, а на стороне AC — отрезок $AE = 12$ *м*. Подобны ли треугольники ABC и ADE?

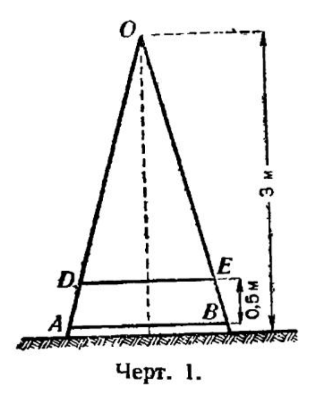
2) В предыдущей задаче, сохранив длину сторон AB и AC, взять $AD = 9$ *м* и $AE = 12$ *м*. Будут ли тогда подобны треугольники ABC и ADE?

11. AB — диаметр одной окружности; AC — хорда. Описана другая окружность на диаметре DE, равном $\frac{13}{17}AB$, и в ней проведена хорда DF, равная $\frac{13}{17}AC$. Определить EF, если известно, что $BC = 3{,}4$ *м*.

12. 1) Стороны одного треугольника равны 0,8 *м*, 1,6 *м* и 2 *м*; периметр подобного ему треугольника равен 5,5 *м*. Определить стороны второго треугольника.

2) Периметр одного треугольника составляет $\frac{11}{13}$ периметра подобного ему треугольника. Разность двух сходственных сторон равна 1 *м*. Определить эти стороны.

13. При устройстве мостов на козловых устоях (черт. 1) для лучшего распределения давления веса моста на грунт к подошвам ног козел A и B прибивают доску AB, а ноги



Черт. 1.

каждой пары связывают схваткой DE. Найти длину схватки DE, если известно, что высота козел $h = 3$ *м*, длина доски $AB = 1,5$ *м*, а также, что схватка укрепляется на расстоянии 0,5 *м* от доски AB.

14. Дан треугольник ABC и внутри него отрезок DE, параллельный AC (D на AB, E на BC). Определить длину DE:

1) если $AC = 20$ *см*, $AB = 17$ *см* и $BD = 11,9$ *см*;

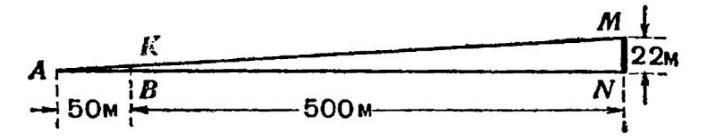
2) если $AC = 18$ *дм*, $AB = 15$ *дм* и $AD = 1$ *м*.

15. Дан треугольник ABC и внутри него отрезок DE, параллельный AC (D на AB и E на BC). Требуется:

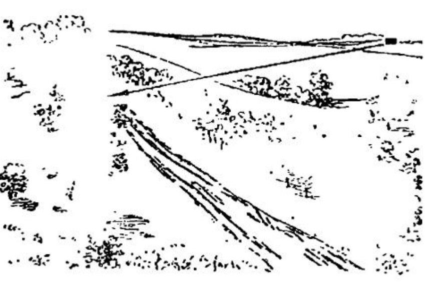
1) определить AD, если $AB = 16$ *см*, $AC = 2$ *дм* и $DE = 15$ *см*;

2) определить отношение $AD : BD$, если известно, что $AC : DE = \frac{5}{7} : \frac{4}{11}$.

16. Открытый участок дороги находится в полосе AB шириной в 50 *м* (черт. 2); неприятельский наблюдательный



пункт находится на верху колокольни высотой $MN = 22$ *м*. Какой высоты следует сделать вертикальную маску KB на расстоянии 500 *м* от колокольни, чтобы закрыть дорогу от наблюдателя противника?



Черт. 2.

17. В треугольнике ABC, стороны которого a, b и c даны, проведена параллельно AC прямая MN так, что $AM = BN$. Определить MN.

18. В треугольнике ABC проведена прямая BD так, что $\angle BDC = \angle ABC$; на стороне AC получаются отрезки $AD = 7$ *см* и $DC = 9$ *см*. Определить сторону BC и отношение $BD : BA$.

19. В треугольнике ABC проведена прямая BD так, что $\angle ABD = \angle BCA$. Определить отрезки AD и DC, если $AB = 2$ *м* и $AC = 4$ *м*.

20. Построить треугольник, подобный данному, периметр которого равняется данной длине.

21. Построить треугольник по углу, одной из сторон, прилежащих к нему, и отношению этой стороны к третьей стороне.

22. Построить треугольник по высоте, углу при вершине и отношению отрезков основания.

Пропорциональные отрезки в трапеции и параллелограмме.

23. $ABCD$—данная трапеция, причём $BC \parallel AD$; O — точка пересечения диагоналей: $AO = 8$ *см*, $OC = 1$ *дм* и $BD = 27$ *см*. Определить OB и OD.

24. Дана трапеция $ABCD$, причём стороны BC и AD параллельны; O — точка пересечения диагоналей; $BO : OD = 0{,}3 : \frac{2}{3}$; средняя линия трапеции равна 29 *см*. Определить основания и отношение $AO : OC$.

25. В трапеции $ABCD$ (где $BC \parallel AD$) с диагональю BD углы ABD и BCD равны. Дано: $BC = 10$ *см*, $DC = 15$ *см* и $BD = 20$ *см*. Определить AB и AD.

26. В трапеции $ABCD$ с диагональю AC углы ABC и ACD равны. Определить диагональ AC, если основания BC и AD соответственно равны 12 *см* и 27 *см*.

27. Основания трапеции относятся, как $5 : 9$, а одна из боковых сторон равна 16 *см*. На сколько надо её продолжить, чтобы она встретилась с продолжением другой боковой стороны?

28. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB = 420$ *м*. На стороне BC взята точка E так, что $BE : EC = 5 : 7$, и проведена прямая DE, пересекающая продолжение AB в точке F. Требуется определить BF.

29. $ABCD$—данный параллелограмм; F—точка на продолжении стороны AB; E — точка пересечения DF и AC. Определить BF, если $AE : EC = m : n$ и $AB = a$.

30. $ABCD$—данный параллелограмм. Через точку пересечения его диагоналей проведена перпендикулярная к

BC прямая, которая пересекает BC в точке E, а продолжение AB — в точке F. Определить BE, если $AB = a$, $BC = b$ и $BF = c$.

Разные задачи.

31. В треугольник вписан параллелограмм, угол которого совпадает с углом треугольника. Стороны треугольника, заключающие этот угол, равны 20 *см* и 25 *см*, а параллельные им стороны параллелограмма относятся, как 6 : 5. Определить стороны параллелограмма.

32. В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что угол A у них общий, а вершина E находится на стороне BC. Определить сторону ромба, если $AB = c$ и $AC = b$.

33. Прямая, проведённая через вершину ромба вне его, отсекает на продолжениях двух сторон отрезки p и q. Определить сторону ромба.

34. Вписать квадрат в данный сегмент так, чтобы одна его сторона лежала на хорде, а концы противоположной стороны — на дуге.

35. Вписать квадрат в данный треугольник так, чтобы одна его сторона лежала на стороне треугольника, а вершины противолежащих углов — на двух других сторонах треугольника.

36. В треугольник с основанием a и высотой h вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а другие две — на боковых сторонах. Вычислить сторону квадрата.

37. В данный треугольник вписать прямоугольник, у которого стороны относились бы, как $m : n$.

38. В треугольник, основание которого равно 48 *см*, а высота 16 *см*, вписан прямоугольник с отношением сторон 5 : 9, причём бо́льшая сторона лежит на основании треугольника. Определить стороны прямоугольника.

39. В треугольник, у которого основание равно 30 *см*, а высота 10 *см*, вписан прямоугольный равнобедренный треугольник так, что его гипотенуза параллельна основанию данного треугольника, а вершина прямого угла лежит на этом основании. Определить гипотенузу.

40. В треугольник вписан полукруг, у которого полуокружность касается основания, а диаметр (с концами на боковых сторонах треугольника) параллелен основанию. Определить радиус, если основание треугольника равно a, а высота h.

41. В треугольнике ABC угол C—прямой; $AC = 6$ *см*, $BC = 12$ *см*. На стороне BC взята точка D так, что $\angle ADC = 90° - \angle B$. На какие части точка D делит сторону BC?

42. В треугольнике ABC даны две стороны: $BC = 16$ *м* и $AC = 12$ *м* и сумма соответствующих высот $AD + BE = 14$ *м*. Определить AD и BE.

43. Стороны параллелограмма равны 2 *м* и 16 *дм*; расстояние между бо́льшими сторонами равно 8 *дм*. Определить расстояние между меньшими сторонами.

44. Периметр параллелограмма равен 48 *см*, а его высоты относятся, как 5 : 7. Определить соответствующие им стороны.

45. Определить длину хорды, если дан радиус r и расстояние a от одного конца хорды до касательной, проведённой через другой её конец.

46. Две окружности внешне касаются. Прямая, проведённая через точку касания, образует в окружностях хорды, из которых одна равна $\frac{13}{5}$ другой. Определить радиусы, если расстояние между центрами равно 36 *см*.

47. ABC — данный треугольник; CD — биссектриса угла C; точка E лежит на BC, причём $DE \parallel AC$. Определить DE, если $BC = a$ и $AC = b$.

48. ABC — данный треугольник; BD — высота; AE — биссектриса угла A; EF — перпендикуляр на AC. Определить EF, если $BD = 30$ *см* и $AB : AC = 7 : 8$.

49. В параллелограмм вписан ромб так, что его стороны параллельны диагоналям параллелограмма. Определить сторону ромба, если диагонали параллелограмма равны l и m.

50. Четыре параллели, между которыми последовательные расстояния относятся, считая сверху, как 2 : 3 : 4, пересечены двумя сходящимися над ними прямыми. Из полученных четырёх параллельных отрезков крайние равны 60 *дм* и 96 *дм*. Определить средние отрезки.

51. В треугольнике ABC проведён от BA к BC отрезок DE, параллельный AC. Дано: $AB = 24$ *м*, $BC = 32$ *м*, $AC = 28$ *м* и $AD + CE = 16$ *м*. Требуется определить DE.

52. AD и BE — высоты треугольника ABC, пересекающиеся в точке O. Дано: $AD + BE = 35$ *дм*, $AO = 9$ *дм* и $BO = 12$ *дм*. Требуется определить OE и OD.

53. В равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна 100 *дм*, а основание 60 *дм*, вписан круг.

Определить расстояние между точками касания, находящимися на боковых сторонах.

54. Радиус сектора равен r, а хорда его дуги равна a. Определить радиус круга, вписанного в этот сектор.

Подобные многоугольники.

55. Стороны одного пятиугольника равны 35 *см*, 14 *см*, 28 *см*, 21 *см* и 42 *см*; меньшая сторона подобного ему пятиугольника равна 12 *см*. Определить остальные стороны его.

56. Стороны одного четырёхугольника относятся между собой, как $1 : \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : 2$; периметр подобного ему четырёхугольника равен 75 *м*. Определить стороны второго четырёхугольника.

57. Стороны одного четырёхугольника равны 10 *дм*, 15 *дм*, 20 *дм* и 25 *дм*; в подобном ему четырёхугольнике сумма наибольшей и наименьшей сторон равна 28 *дм*. Определить стороны второго четырёхугольника.

58. Наибольшие стороны двух подобных многоугольников равны 35 *м* и 14 *м*, а разность их периметров равна 60 *м*. Определить периметры.

59. Завод, изготовляющий цементные плиты для пола, установил у себя нормальную форму (стандарт) для прямоугольных плит такую, чтобы половина $BCFE$ плиты была подобна целой плите $ABCD$. Найти отношение сторон таких плит (черт. 3).

Черт. 3.

60. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB = a$ и $BC = b$. Прямая EF отсекает параллелограмм $ABEF$, подобный $ABCD$. Определить отрезок BE.

§ 3(10). Числовая зависимость между линейными элементами треугольников и некоторых четырёхугольников.

В прямоугольном треугольнике обозначают: a и b — катеты; c — гипотенуза; a_c и b_c — проекции катетов a и b на гипотенузу; h — высота из вершины прямого угла. Предполагается, что отрезки измерены одной и той же единицей.

Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике.

1. Вычислить гипотенузу, если даны оба катета: 1) 12 *см* и 35 *см*; 2) 56 *см* и 33 *см*; 3) 4 *м* и 9 *дм*; 4) 60 *см* и 91 *см*; 5) 21 и $3\frac{1}{4}$; 6) $\frac{3}{2}$ и $\frac{7}{16}$; 7) 16,8 и 2,6; 8) 5 и 6.

2. Вычислить второй катет, если даны гипотенуза и первый катет[1]):

1) 289 и 240; 2) 269 и 69; 3) 145 и 143;

4) 42,5 и 6,5; 5) 17 и $15\frac{2}{5}$; 6) 10 и 7.

3. По двум данным элементам прямоугольного треугольника вычислить остальные четыре:

1) $a = 15$, $b = 20$; 2) $a = 24$, $b = 7$; 3) $a = 4$, $b = 5$;

4) $a = 100$, $c = 125$; 5) $b = 65$, $c = 169$; 6) $a = 600$, $c = 625$;

7) $a = 6$, $a_c = 3{,}6$; 8) $b = 7$, $b_c = 1{,}96$;

9) $c = 29$, $a_c = 15\frac{6}{29}$; 10) $c = 3$, $b_c = 2$;

11) $a_c = 1\frac{1}{2}$, $b_c = 2\frac{2}{3}$; 12) $a_c = 2$, $b_c = 18$;

13) $a = 136$, $h = 120$; 14) $b = 9$, $h = 8\frac{32}{41}$.

4. По данной сумме двух отрезков и среднему пропорциональному этих отрезков построить отрезки.

5. По данной разности двух отрезков и среднему пропорциональному этих отрезков построить отрезки.

6. Доказать, что в прямоугольном треугольнике $ab = ch$.

7. Катеты относятся, как 5 : 6, а гипотенуза равна 122 *см*. Найти отрезки гипотенузы, отсекаемые высотой.

8. Катеты относятся, как 3 : 2, а высота делит гипотенузу на отрезки, из которых один на 2 *м* больше другого. Определить гипотенузу.

9. Катеты относятся, как 3 : 7, а высота, проведённая на гипотенузу, равна 42 *см*. Определить отрезки гипотенузы.

10. Доказать, что диаметр окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, есть средняя пропорциональная между параллельными сторонами трапеции.

11. Доказать, что отношение квадратов катетов равно отношению их проекций на гипотенузу.

---

[1]) В задаче 2 и во многих других случаях выгодно при вычислении разность квадратов заменять произведением суммы на разность.

12. 1) Построить два отрезка, квадраты которых относятся, как $m:n$.

2) Построить два отрезка, которые относились бы, как квадраты двух данных отрезков.

Теорема Пифагора.

13. Узнать, какими тремя последовательными целыми числами могут выражаться стороны прямоугольного треугольника.

14. Между двумя фабричными зданиями устроен покатый жолоб для передачи материалов. Расстояние между зданиями равно 10 *м*, а концы жолоба расположены на высоте 8 *м* и 4 *м* над землёй. Определить длину жолоба.

15. 1) Точка внутри прямого угла удалена от его сторон на расстояния a и b. Найти её расстояние от вершины.

2) Стороны прямоугольника равны 60 *см* и 91 *см*. Чему равна его диагональ?

16. Требуется выфрезеровать квадратную головку со стороной 32 *мм*. Чему должен быть равен наименьший диаметр круглого железа, годного для этой цели?

17. 1) Сторона квадрата равна a. Чему равна его диагональ?

2) Определить сторону квадрата, если она меньше диагонали на 2 *см*.

18. Диаметр бревна 12 *см*. Можно ли из этого бревна вытесать квадратный брус со стороной 10 *см*?

19. 1) Стороны прямоугольника равны a и b. Определить радиус описанного круга.

2) В круг вписан прямоугольник, стороны которого относятся, как 8 : 15. Определить эти стороны, если радиус круга равен 34 *см*.

20. 1) Катеты прямоугольного треугольника равны 8 *дм* и 18 *см*. Определить радиус описанного круга.

2) Катеты прямоугольного треугольника равны 16 *см* и 12 *см*. Определить медиану гипотенузы.

21. 1) В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 17 *см*, а основание 16 *см*. Определить высоту.

2) Определить стороны равнобедренного треугольника, если его высота равна 35 *см*, а основание относится к боковой стороне, как 48 : 25.

3) В равнобедренном треугольнике основание равно 4 *см*, а угол при нём равен 45°. Определить боковую сторону.

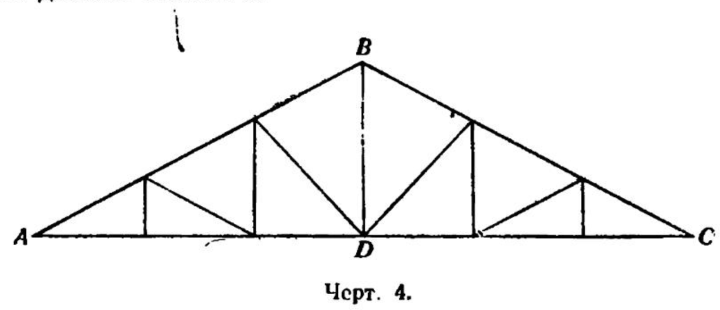
22. Стропильная ферма (черт. 4) имеет ноги AB и CB по 9 *м* и пролёт AC в 15 *м*. Определить высоту фермы BD.

23. 1) Биссектриса прямого угла делит гипотенузу прямоугольного треугольника на части, равные $2\frac{1}{7}$ *м* и $2\frac{6}{7}$ *м*. Определить катеты.

2) Катеты прямоугольного треугольника равны 15 *см* и 20 *см*. Из вершины прямого угла проведены высота и биссектриса. На какие отрезки разделилась гипотенуза?

24. 1) В равностороннем треугольнике определить высоту по данной стороне a.

2) В равностороннем треугольнике определить сторону по данной высоте h.



Черт. 4.

3) В равностороннем треугольнике высота меньше стороны на m. Определить сторону.

4) В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°, а больший катет равен 6 *см*. Определить две другие стороны этого треугольника.

25. 1) Боковые стороны треугольника равны: $a = 25$ *см* и $b = 30$ *см*, а высота $h_c = 24$ *см*. Определить основание c.

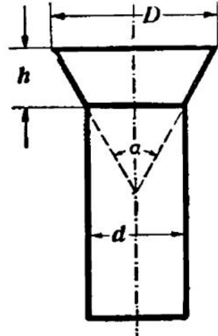
2) В треугольнике больший угол при основании равен 45°, а высота делит основание на части в 20 *см* и 21 *см*. Определить бо́льшую боковую сторону.

3) Из одной точки проведены к данной прямой перпендикуляр и две наклонные. Определить длину перпендикуляра, если наклонные равны 41 *см* и 50 *см*, а их проекции на данную прямую относятся, как 3 : 10.

26. 1) Диагонали ромба равны 24 *см* и 70 *см*. Определить сторону.

2) Определить диагонали ромба, если они относятся, как 3 : 4, а периметр равен 1 *м*.

27. 1) В равнобедренной трапеции основания равны 10 *см* и 24 *см*, боковая сторона 25 *см*. Определить высоту трапеции.



Черт. 5.

2) В равнобедренной трапеции боковая сторона равна 41 *см*, высота равна 4 *дм* и средняя линия 45 *см*. Определить основание.

28. Параллельно прямой дороге, на расстоянии 500 *м* от неё, расположена цепь стрелков; расстояние между крайними стрелками равно 120 *м*, дальность полёта пули равна 2,8 *км*. Какой участок дороги находится под обстрелом этой цепи?

29. На чертеже 5 изображена заклёпка ОСТ 302 (ОСТ — общесоюзный стандарт) с потайной головкой. Угол $\alpha = 60°$. Вычислить:

1) D, если $d = 16{,}5$ *мм* и $h = 7{,}5$ *мм*;
2) d, если $D = 30$ *мм* и $h = 9{,}5$ *мм*;
3) h, если $D = 35$ *мм* и $d = 22$ *мм*.

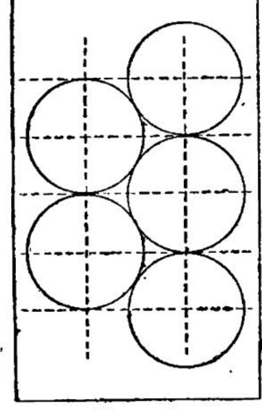
Написать формулу, связывающую между собой D, d, h.

30. 1) В треугольнике ABC проведена высота AD. Доказать, что $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$.

2) Если M — некоторая точка высоты AD треугольника ABC, то $AB^2 - AC^2 = BM^2 - CM^2$. Доказать.

31. 1) Доказать, что в прямоугольной трапеции разность квадратов диагоналей равна разности квадратов оснований.

2) В прямоугольной трапеции меньшая диагональ равна наклонной боковой стороне. Определить бо́льшую диагональ, если наклонная боковая сторона равна a, а меньшее основание равно b.


Черт. 6.

32. Из листа железа требуется выштамповать круглые шайбы диаметром в 28 *мм*. Найти расстояние между прямыми, на которых следует расположить центры шайб (черт. 6).

33. 1) Радиус круга равен 89 *дм*, хорда 16 *м*. Определить её расстояние от центра.

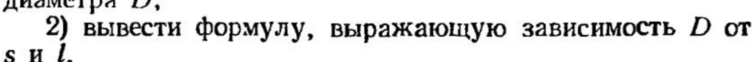
2) O — центр; ACB — хорда; OCD — радиус, перпендикулярный к ней, $OC = 9$ *см* и $CD = 32$ *см*. Определить хорду.

3) Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 13 *см* и 15 *см*, а общая хорда равна 24 *см*. Определить расстояние между центрами.

4) AB и CD — две параллельные хорды, расположенные по разные стороны от центра O окружности радиуса $R = 15$ *см*. Хорда $AB = 18$ *см*, хорда $CD = 24$ *см*. Определить расстояние между хордами.

5) Две параллельные хорды AB и CD расположены по одну сторону от центра O окружности радиуса $R = 30$ *см*. Хорда $AB = 48$ *см*, хорда $CD = 36$ *см*. Определить расстояние между хордами.

34. Чтобы измерить диаметр большого шкива, установили штангенциркуль так, как показано на чертеже 7. Длина ножек штангенциркуля $s = 25$ *мм*, расстояние между концами ножек $l = 200$ *мм*;



Черт. 7.

1) определить длину диаметра D;

2) вывести формулу, выражающую зависимость D от s и l.

35. В сегменте хорда равна a, а высота h. Определить радиус круга.

36. Радиус круга равен 25 *см*; две параллельные хорды равны 14 *см* и 40 *см*. Определить расстояние между ними.

37. Расстояния от одного конца диаметра до концов параллельной ему хорды равны 13 *см* и 84 *см*. Определить радиус круга.

38. 1) К окружности радиуса, равного 36 *см*, проведена касательная из точки, удалённой от центра на 85 *см*. Определить длину касательной.

2) Из общей точки проведены к окружности две каса-

тельные. Радиус окружности равен 11 *см*, а сумма касательных равна 120 *см*. Определить расстояние от центра до исходной точки касательных.

3) К окружности радиуса, равного 7 *см*, проведены две касательные из одной точки, удалённой от центра на 25 *см*. Определить расстояние между точками касания.

39. Два круга радиусов R и r внешне касаются. Из центра одного круга проведена касательная к другому кругу, а из полученной точки касания проведена касательная к первому кругу. Определить длину последней касательной.

40. 1) Два круга касаются извне. Определить длину их общей внешней касательной (между точками касания), если радиусы равны 16 *см* и 25 *см*.

2) Радиусы двух кругов равны 27 *см* и 13 *см*, а расстояние между центрами равно 50 *см*. Определить длину их общих касательных.

41. Касательная и секущая, проведённые из общей точки к одной окружности, взаимно перпендикулярны. Касательная равна 12 *м*, а внутренняя часть секущей равна 10 *м*. Определить радиус окружности.

42. AB и CD — параллельные прямые. AC — секущая, E и F — точки пересечения прямых AB и CD с биссектрисами углов C и A. Дано: $AF = 96$ *см* и $CE = 110$ *см*. Требуется определить AC.

43. В тупоугольном равнобедренном треугольнике ABC основание $AC = 32$ *м*, а боковая сторона 20 *м*. Из вершины B проведён перпендикуляр к боковой стороне до пересечения с основанием. На какие части он делит основание?

44. Катет $AC = 15$ *см*; катет $CB = 8$ *см*. Из центра C радиусом CB описана дуга, отсекающая от гипотенузы часть BD, которую и требуется определить.

45. Дуга, описанная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, радиусом, равным меньшему катету, делит гипотенузу на отрезки в 98 *см* и 527 *см* (начиная от меньшего катета). Определить катеты.

46. AB — диаметр круга; BC — касательная; D — точка пересечения прямой AC с окружностью. Дано: $AD = 32$ *см* и $DC = 18$ *см*. Требуется определить радиус.

47. AB — диаметр; BC и CDA — касательная и секущая. Определить отношение $CD : DA$, если BC равна радиусу.

Биссектриса в прямоугольном треугольнике.

48. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу в отношении $7:9$. В каком отношении (считая части в том же порядке) делит её высота?

49. Определить катеты, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на части в 15 *см* и 20 *см*.

50. В равнобедренном прямоугольном треугольнике катет равен a. На какие части делит его биссектриса противолежащего угла?

51. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит катет на отрезки m и n $(m > n)$. Определить другой катет и гипотенузу.

52. В прямоугольном треугольнике, катеты которого равны 15 *дм* и 2 *м*, проведены: высота из вершины прямого угла и биссектрисы обоих углов, образуемых высотой с катетами. Определить отрезок гипотенузы, заключённый между биссектрисами.

53. В прямоугольном треугольнике ABC катет $BC = 6$ *см* и гипотенуза $AB = 10$ *см*. Проведены биссектрисы угла ABC и угла, с ним смежного, пересекающие катет AC и его продолжение в точках D и E. Определить длину DE.

54. В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона $AB = 10$ *м* и основание $AC = 12$ *м*. Биссектрисы углов A и C пересекаются в точке D. Требуется определить BD.

55. 1) В равнобедренном треугольнике основание равно 30 *см*, а боковая сторона равна 39 *см*. Определить радиус вписанного круга.

2) В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении $17:15$. Основание равно 60 *см*. Найти радиус этого круга.

Высота и стороны в прямоугольном треугольнике, ромбе и трапеции.

56. Из точки B проведены к данной прямой перпендикуляр BC и наклонная BA. На AC взята точка D, и прямая BD продолжена до пересечения в точке E с прямой AE, перпендикулярной к AC. Определить AE, если $BA = 53$ *дм*, $AD = 8$ *дм* и $DC = 20$ *дм*.

57. 1) В равнобедренном треугольнике основание равно 30 *дм*, а высота 20 *дм*. Определить высоту, опущенную на боковую сторону.

2) В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 3 *дм*, а высота, опущенная на боковую

сторону, равна 4 *дм*. Определить стороны этого треугольника.

3) Диагонали ромба равны 14 *дм* и 48 *дм*. Определить его высоту.

58. 1) Гипотенуза $AB = 34$ *см*; катет $BC = 16$ *см*. Определить длину перпендикуляра, восставленного к гипотенузе из середины до пересечения с катетом AC.

2) Радиус круга равен r. Определить длину хорды, проведённой из конца данного диаметра через середину перпендикулярного к нему радиуса.

59. В прямоугольном треугольнике ABC катет $AC = 16$ *дм* и катет $BC = 12$ *дм*. Из центра B радиусом BC описана окружность и к ней проведена касательная, параллельная гипотенузе (причём касательная и треугольник лежат по разные стороны гипотенузы). Катет BC продолжен до пересечения с проведённой касательной. Определить, на сколько продолжен катет.

60. Из одной точки проведены к кругу две касательные. Длина касательной равна 156 *дм*, а расстояние между точками касания равно 120 *дм*. Определить радиус круга.

61. В прямоугольной трапеции основания равны 17 *дм* и 25 *дм*, а бо́льшая боковая сторона равна 10 *дм*. Из середины этой стороны проведён перпендикуляр к ней до встречи с продолжением другой боковой стороны. Определить длину этого перпендикуляра.

Смешанные задачи на прямоугольный треугольник.

62. AC и CB — катеты; CD — высота; $DE \parallel BC$. Определить отношение $AE : EC$, если $AC : CB = 4 : 5$.

63. AC и CB — катеты; CD — высота; $DE \perp AC$ и $DF \perp CB$. Определить DE и DF, если $AC = 75$ *дм* и $BC = 100$ *дм*.

64. В двух равнобедренных треугольниках боковые стороны имеют одинаковую длину, а сумма углов при вершинах равна 180°. Основания относятся, как $9 : 40$, а длина боковой стороны равна 41 *дм*. Определить основания.

65. 1) В треугольнике основание равно 60 *м*, высота 12 *м* и медиана основания 13 *м*. Определить боковые стороны.

2) В прямоугольном треугольнике найти отношение катетов, если высота и медиана, выходящие из вершины прямого угла, относятся, как $40 : 41$.

66. Определить радиус круга, описанного около равнобедренного треугольника, если основание и боковая

сторона треугольника соответственно равны: 1) 6 *дм* и 5 *дм*; 2) 24 *м* и 13 *м*.

67. В прямоугольном треугольнике катеты равны 13 *дм* и 84 *дм*. Определить радиус вписанного круга.

68. Расстояние между центрами двух окружностей, лежащих одна вне другой, равно 65 *дм*; длина их общей внешней касательной (между точками касания) равна 63 *дм*; длина их общей внутренней касательной равна 25 *дм*. Определить радиусы окружностей.

69. Длины двух параллельных хорд равны 40 *дм* и 48 *дм*, расстояние между ними равно 22 *дм*. Определить радиус круга.

70. В равнобедренной трапеции, описанной около круга, основания равны 36 *см* и 1 *м*. Определить радиус круга.

71. Около круга, радиус которого равен 12 *см*, описана равнобедренная трапеция с боковой стороной в 25 *см*. Определить основания этой трапеции.

72. Около круга радиуса r описана равнобедренная трапеция, у которой параллельные стороны относятся, как $m : n$. Определить стороны этой трапеции.

73. AB и AC — касательные к одному кругу с центром O, M — точка пересечения прямой AO с окружностью; DME — отрезок касательной, проведённой через M между AB и AC. Определить длину DE, если радиус круга равен 15 *дм*, а расстояние $AO = 39$ *дм*.

74. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 *дм* и 20 *дм*. Определить расстояние от центра вписанного круга до высоты, проведённой на гипотенузу.

75. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведён перпендикуляр на гипотенузу, и на нём, как на диаметре, описана окружность, которая на катетах CA и CB даёт внутренние отрезки m и n. Определить катеты ($m = 12$; $n = 18$).

76. В прямоугольном треугольнике катеты равны 75 *дм* и 100 *дм*. На отрезках гипотенузы, образуемых высотой, построены полукруги по одну сторону с данным треугольником. Определить отрезки катетов, заключённые внутри этих полукругов.

77. Если два круга имеют внешнее касание, то их общая внешняя касательная есть средняя пропорциональная между их диаметрами. Доказать.

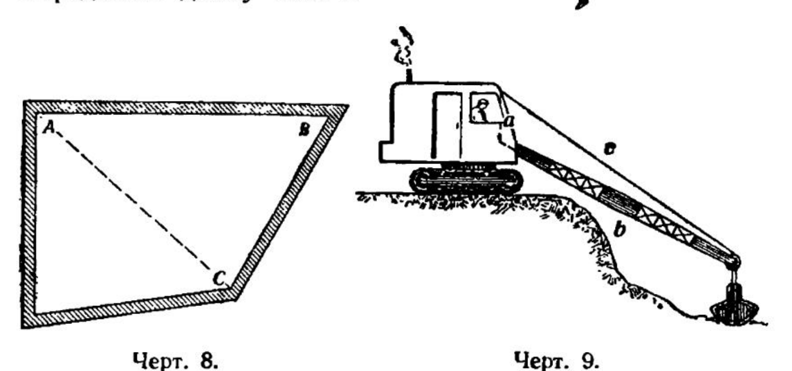
78. В трапеции $ABCD$ меньшая диагональ BD перпендикулярна к основаниям AD и BC; сумма острых

углов A и C равна 90°. Основание $AD = a$ и $BC = b$. Определить боковые стороны AB и CD.

Косоугольный треугольник.

79. На чертеже 8 показан план помещения, которое желают разгородить по линии AC. Ввиду препятствий, встречающихся вдоль прямой AC, вместо неё измерены: $AB = 50$ *м*, $BC = 35$ *м* и $\angle ABC = 60°$. Вычислить по этим данным длину AC.

80. На чертеже 9 изображён кран, у которого стойка $a = 10$ *м* и плечо $b = 13$ *м*. Угол между a и b равен 120°. Определить длину тяги c.



Черт. 8. Черт. 9.

81. В треугольнике определить вторую боковую сторону, если следующими числами соответственно выражаются первая боковая сторона, основание и проекция второй боковой стороны на основание: 1) 6; 5; 3,8; 2) 2; 3; 2; 3) 12; 8; 11; 4) 2; 2; 3.

82. Определить вид треугольника (относительно углов), если даны три стороны или отношения их: 1) 2; 3; 4; 2) 3; 4; 5; 3) 4; 5; 6; 4) 10: 15: 18; 5) 68; 119; 170.

83. В треугольнике ABC пусть будут: b — основание, a и c — боковые стороны; p и q — их проекции на основание, h — высота. Определить p, q и h, если даны три стороны:

1) $a = 13$; $b = 14$, $c = 15$; 2) $a = 37$; $b = 30$; $c = 13$;
3) $a = 25$, $b = 12$, $c = 17$; 4) $a = 2$; $b = 4$, $c = 3$.

84. В треугольнике определить третью сторону, если две другие образуют угол в 60° и соответственно равны: 1) 5 *см* и 8 *см*; 2) 8 *см* и 15 *см*; 3) 63 *см* и 80 *см*.

85. В треугольнике определить третью сторону, если две другие образуют угол в 120° и соответственно равны: 1) 3 *см* и 5 *см*; 2) 7 *см* и 8 *см*; 3) 11 *см* и 24 *см*.

86. В треугольнике определить третью сторону, если две другие образуют угол в 45° и соответственно равны: 1) 2 и 3; 2) $\sqrt{8}$ и 5; 3) $\sqrt{18}$ и 7.

87. Определить стороны треугольника, зная, что средняя по величине сторона отличается от каждой из двух других на единицу и что проекция большей стороны на среднюю равна 9 единицам.

88. Сторона треугольника равна 21 *см*, а две другие стороны образуют угол в 60° и относятся, как 3 : 8. Определить эти стороны.

89. В треугольнике боковая сторона равна 16 *м* и образует с основанием угол в 60°; другая боковая сторона равна 14 *м*. Определить основание.

90. Основание треугольника равно 13 *см*; угол при вершине равен 60°; сумма боковых сторон равна 22 *см*. Определить боковые стороны и высоту.

91. В треугольнике основание равно 12 *см*; один из углов при нём равен 120°; сторона против этого угла равна 28 *см*. Определить третью сторону.

92. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB продолжена на длину BD, равную BC, и точка D соединена с C. Определить стороны треугольника ADC, если катет $BC = a$.

93. Определить хорду половинной дуги, если хорда целой дуги равна a, радиус равен r ($r = 25$; $a = 48$).

94. 1) В прямоугольном треугольнике ABC катет $AC = 15$ *см* и катет $BC = 20$ *см*. На гипотенузе AB отложена часть AD длиной в 4 *см*, и точка D соединена с C. Определить длину CD.

2) Треугольник ABC — прямоугольный при C. На продолжении гипотенузы AB отложен отрезок BD, равный катету BC, и точка D соединена с C. Определить длину CD, если $BC = 7$ *см* и $AC = 24$ *см*.

95. В треугольнике ABC проведены высоты BD и CE, и точки D и E соединены. Найти отношение площади $\triangle ADE$ к площади $\triangle ABC$: 1) если $\angle A = 45°$; 2) если $\angle A = 30°$.

96. В треугольнике ABC дана точка D на стороне AB; определить длину CD, если известно, что $a = 37$, $b = 15$, $c = 44$ и $AD = 14$.

97. В тупоугольном треугольнике бо́льшая сторона равняется 16 *см*, а высоты, проведённые из обоих её концов, отстоят от вершины тупого угла на 2 *см* и на 3 *см*. Определить две меньшие стороны треугольника.

98. Стороны равнобедренного треугольника суть: $AB = BC = 50$ *см* и $AC = 60$ *см*. Проведены высоты AE и CD, и точки D и E соединены. Определить стороны треугольника DBE.

99. В треугольнике ABC из конца C стороны AC проведён перпендикуляр к ней до пересечения в точке D с продолжением стороны AB. Определить BD и CD, если $AB = 45$, $BC = 39$ и $AC = 42$.

100. В треугольнике ABC даны стороны: $AB = 15$, $AC = 14$ и $BC = 13$. Биссектриса угла B продолжена за его вершину до пересечения в точке E с перпендикуляром к AC, проведённым из точки C. Определить длину CE.

101. Данного круга касаются два равных меньших круга — один изнутри, другой извне, причём дуга между точками касания содержит 60°. Радиусы меньших кругов равны r, радиус большего круга равен R. Определить расстояние между центрами меньших кругов.

Параллелограмм и трапеция.

102. 1) Стороны параллелограмма равны 23 *см* и 11 *см*, а диагонали относятся, как 2 : 3. Определить диагонали.

2) Диагонали параллелограмма равны 17 *см* и 19 *см*, а стороны относятся, как 2 : 3. Определить стороны.

103. 1) Диагонали параллелограмма равны 12 *см* и 14 *см*, а разность сторон равна 4 *см*. Определить стороны параллелограмма.

2) Определить стороны и диагонали параллелограмма, если бо́льшая сторона равна меньшей диагонали, разность сторон равна 3 *см* и разность диагоналей равна 2 *см*.

104. 1) Стороны треугольника: 16, 18 и 26. Вычислить медиану большей стороны.

2) Две стороны треугольника 7 и 11; медиана к третьей стороне равна 6. Определить третью сторону.

3) Стороны треугольника a, b и c. Определить медианы.

105. Определить высоту параллелограмма, у которого основание равно 51 *см*, а диагонали 40 *см* и 74 *см*.

106. В равнобедренной трапеции определить длину диагоналей: 1) если основания равны 4 *м* и 6 *м*, а боковая

сторона равна 5 *м*; 2) если одна сторона равна 5 *см*, а другие три равны каждая 4 *см*.

√107. Определить высоту и диагонали трапеции, если основания a и c и боковые стороны b и d выражаются следующими числами:

√1) $a = 25$, $b = 13$, $c = 11$, $d = 15$;

2) $a = 28$, $b = 25$, $c = 16$, $d = 17$;

3) $a = 6$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 4$.

108. В треугольник вписан параллелограмм так, что одна его сторона лежит на основании треугольника, а диагонали соответственно параллельны боковым сторонам треугольника. Основание треугольника равно 45 *см*, а боковые стороны 39 *см* и 48 *см*. Определить стороны параллелограмма.

109. Доказать, что в равнобедренной трапеции квадрат диагонали равен квадрату боковой стороны, сложенному с произведением оснований.

110. Доказать, что во всякой трапеции сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов боковых сторон, сложенной с удвоенным произведением оснований.

111. Доказать, что во всяком четырёхугольнике сумма квадратов диагоналей вдвое больше суммы квадратов отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

112. Определить острый угол ромба, в котором сторона есть средняя пропорциональная между диагоналями.

§ 4(11). Пропорциональные отрезки в круге.

1. Ферма моста ограничена дугой окружности (черт. 10), высота фермы $MK = h = 3$ *м*; радиус дуги AMB пролёта $R = 8{,}5$ *м*. Вычислить длину AB пролёта моста.

2. В сводчатом подвале, имеющем форму полуцилиндра, надо поставить две стойки, каждая на одинаковом расстоянии от ближайшей стены. Определить высоту стоек, если ширина подвала по низу равна 4 *м*, а расстояние между стойками 2 *м*.

3. 1) Из точки окружности проведён перпендикуляр на диаметр. Определить его длину при следующей длине отрезков диаметра: 1) 12 *см* и 3 *см*; 2) 16 *см* и 9 *см*; 3) 2 *м* и 5 *дм*.

2) Из точки диаметра проведён перпендикуляр до пересечения с окружностью. Определить длину этого перпендикуляра, если диаметр равен 40 *см*, а проведённый перпендикуляр отстоит от одного из концов диаметра на 8 *см*.

4. Диаметр разделён на отрезки: $AC = 8$ *дм* и $CB = 5$ *м*, и из точки C проведён к нему перпендикуляр CD данной длины. Указать положение точки D относительно круга, если CD равняется: 1) 15 *дм*; 2) 2 *м*; 3) 23 *дм*.

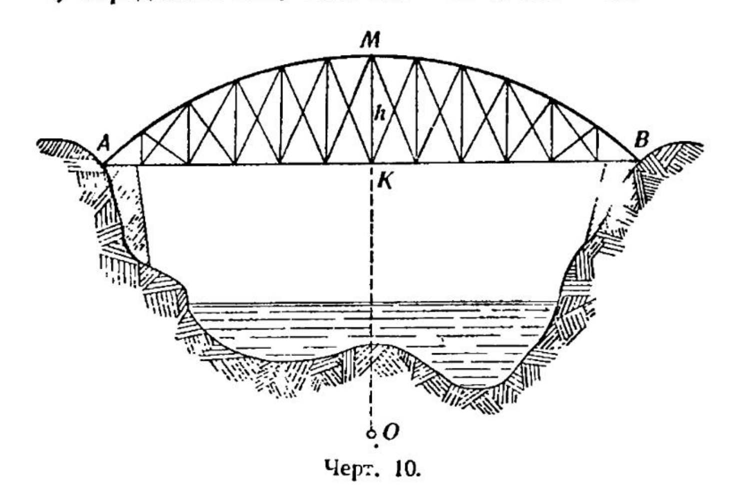
5. ACB — полуокружность; CD — перпендикуляр на диаметр AB. Требуется:

1) определить DB, если $AD = 25$ и $CD = 10$;

2) определить AB, если $AD : DB = 4 : 9$ и $CD = 30$;

3) определить AD, если $CD = 3AD$, а радиус равен r;

4) определить AD, если $AB = 50$ и $CD = 15$.



Черт. 10.

6. 1) Перпендикуляр из точки окружности на радиус, равный 34 *см*, делит его в отношении $8 : 9$ (начиная от центра). Определить длину перпендикуляра.

2) Хорда BDC перпендикулярна к радиусу ODA. Определить BC, если $OA = 25$ *см* и $AD = 10$ *см*.

3) Ширина кольца, образованного двумя концентрическими окружностями, равна 8 *дм*; хорда большей окружности, касательная к меньшей, равна 4 *м*. Определить радиусы окружностей.

7. С помощью сравнения отрезков доказать, что среднее арифметическое двух чисел (неравных) больше их среднего геометрического.

8. Построить отрезок, средний пропорциональный между отрезками 3 *см* и 5 *см*.

9. Построить отрезок, равный: $\sqrt{15}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{3}$.

10. ADB — диаметр; AC — хорда; CD — перпендикуляр к диаметру. Определить хорду AC: 1) если $AB = 2$ *м* и $AD = 0{,}5$ *м*; 2) если $AD = 4$ *см* и $DB = 5$ *см*; 3) если $AB = 20$ *м* и $DB = 15$ *м*.

11. AB — диаметр; AC — хорда; AD — её проекция на диаметр AB. Требуется:

1) определить AD, если $AB = 18$ *см* и $AC = 12$ *см*;
2) определить радиус, если $AC = 12$ *м* и $AD = 4$ *м*;
3) определить DB, если $AC = 24$ *см* и $DB = \frac{7}{9} AD$.

12. AB — диаметр; AC — хорда; AD — её проекция на диаметр AB. Требуется:

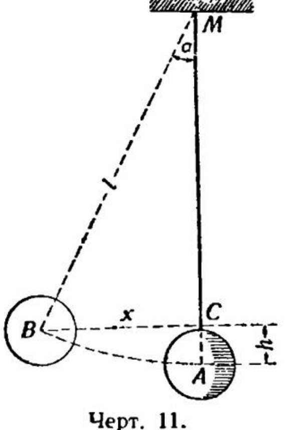
1) определить AC, если $AB = 35$ *см* и $AC = 5AD$;
2) определить AC, если радиус равен r и $AC = DB$.

13. Две хорды пересекаются внутри круга. Отрезки одной хорды равны 24 *см* и 14 *см*; один из отрезков другой хорды равен 28 *см*. Определить второй её отрезок.

$\sqrt{}$ 14. Мостовая ферма ограничена дугой окружности (черт. 10); длина моста $AB = 6$ *м*, высота $h = 1{,}2$ *м*. Определить радиус дуги ($OM = R$).

15. Два отрезка AB и CD пересекаются в точке M так, что $MA = 7$ *см*, $MB = 21$ *см*, $MC = 3$ *см* и $MD = 16$ *см*. Лежат ли точки A, B, C и D на одной окружности?

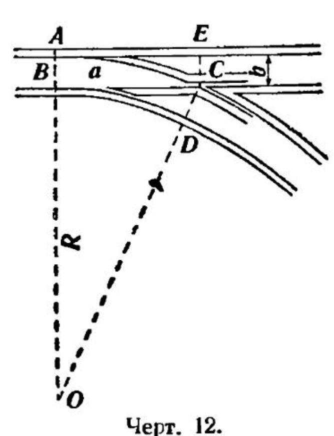
16. Длина маятника $MA = l = 1$ *м* (черт. 11), высота подъёма его, при отклонении на угол α, $CA = h = 10$ *см*. Найти расстояние BC точки B от MA.



Черт. 11.

17. Для перевода железнодорожного пути шириной $b = 1{,}52$ *м* в месте AB (черт. 12) сделано закругление; при этом оказалось, что $BC = a = 42{,}4$ *м*. Определить радиус закругления $OA = R$.

18. Хорда AMB повёрнута около точки M так, что отрезок MA увеличился в $2\frac{1}{2}$ раза. Как изменился отрезок MB?



Черт. 12.

19. 1) Из двух пересекающихся хорд одна разделилась на части в 48 *см* и 3 *см*, а другая — пополам. Определить длину второй хорды.

2) Из двух пересекающихся хорд одна разделилась на части в 12 *м* и 18 *м*, а другая — в отношении 3 : 8. Определить длину второй хорды.

20. Из двух пересекающихся хорд первая равна 32 *см*, а отрезки другой хорды равны 12 *см* и 16 *см*. Определить отрезки первой хорды.

21. Секущая ABC повёрнута около внешней точки A так, что внешний её отрезок AB уменьшился в три раза. Как изменилась длина секущей?

22. Пусть ADB и AEC две прямые, пересекающие окружность: первая — в точках D и B, вторая — в точках E и C. Требуется:

1) определить AE, если $AD = 5$ *см*, $DB = 15$ *см* и $AC = 25$ *см*;

2) определить BD, если $AB = 24$ *м*, $AC = 16$ *м* и $EC = 10$ *м*;

3) определить AB и AC, если $AB + AC = 50$ *м*, а $AD : AE = 3 : 7$.

23. Радиус окружности равен 7 *см*. Из точки, удалённой от центра на 9 *см*, проведена секущая так, что она делится окружностью пополам. Определить длину этой секущей.

24. MAB и MCD — две секущие к одной окружности. Требуется:

1) определить CD, если $MB = 1$ *м*, $MD = 15$ *дм* и $CD = MA$;

2) определить MD, если $MA = 18$ *см*, $AB = 12$ *см* и $MC : CD = 5 : 7$;

3) определить AB, если $AB = MC$, $MA = 20$ и $CD = 11$.

25. Две хорды продолжены до взаимного пересечения. Определить длину полученных продолжений, если хорды равны a и b, а их продолжения относятся, как $m : n$.

26. Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Определить длину касательной, если внешний

и внутренний отрезки секущей соответственно выражаются следующими числами: 1) 4 и 5; 2) 2,25 и 1,75; 3) 1 и 2.

27. Касательная равна 20 *см*, а наибольшая секущая, проведённая из той же точки, равна 50 *см*. Определить радиус круга.

28. Секущая больше своего внешнего отрезка в $2\frac{1}{4}$ раза. Во сколько раз она больше касательной, проведённой из той же точки?

29. Общая хорда двух пересекающихся окружностей продолжена, и из точки, взятой на продолжении, проведены к ним касательные. Доказать, что они равны.

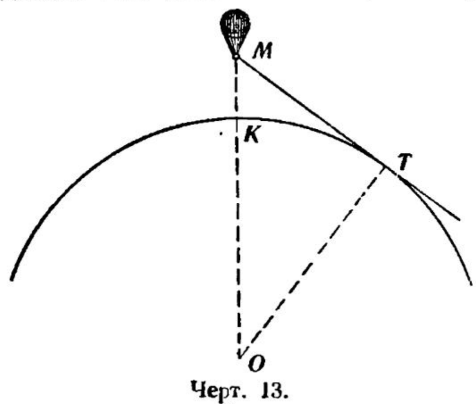
30. На одной стороне угла A отложены один за другим отрезки: $AB = 6$ *см* и $BC = 8$ *см*, а на другой стороне отложен отрезок $AD = 10$ *см*. Через точки B, C и D проведена окружность. Узнать, касается ли этой окружности прямая AD, а если нет, то будет ли точка D первой (считая от A) или второй точкой пересечения.

31. Пусть будет: AB — касательная и ACD — секущая той же окружности. Требуется:

1) определить CD, если $AB = 2$ *см* и $AD = 4$ *см*;

2) определить AD, если $AC : CD = 4 : 5$ и $AB = 12$ *см*;

3) определить AB, если $AB = CD$ и $AC = a$.



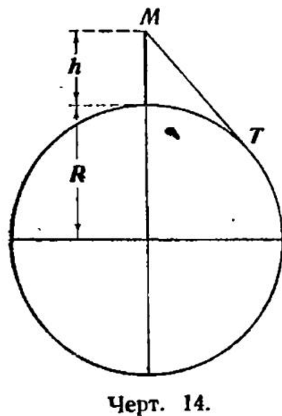
Черт. 13.

32. 1) Как далеко видно с воздушного шара (черт. 13), поднявшегося на высоту 4 *км* над Землёй (радиус Земли равен ≈ 6370 *км*)?

2) Гора Эльбрус (на Кавказе) поднимается над уровнем моря на 5600 *м*. Как далеко можно видеть с вершины этой горы?

3) M — наблюдательный пункт высотой h метров над Землёй (черт. 14); радиус Земли R, $MT = d$ есть наибольшее видимое расстояние. Доказать, что $d = \sqrt{2Rh + h^2}$.

Замечание. Так как h^2 вследствие своей малости сравнительно с $2Rh$ на результат почти не влияет, то можно пользоваться приближённой формулой $d \approx \sqrt{2Rh}$.



Черт. 14.

33. 1) Касательная и секущая, выходящие из одной точки, соответственно равны 20 *см* и 40 *см*; секущая удалена от центра на 8 *см*. Определить радиус круга.

2) Определить расстояние от центра до той точки, из которой выходят касательная и секущая, если они соответственно равны 4 *см* и 8 *см*, а секущая удалена от центра на 12 *см*.

34. 1) Из общей точки проведены к окружности касательная и секущая. Определить длину касательной, если она на 5 *см* больше внешнего отрезка секущей и на столько же меньше внутреннего отрезка.

2) Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Секущая равна a, а её внутренний отрезок больше внешнего отрезка на длину касательной. Определить касательную.

35. Из общей точки проведены к одной окружности касательная и секущая. Касательная больше внутреннего и внешнего отрезков секущей соответственно на 2 *см* и 4 *см*. Определить длину секущей.

36. Из одной точки проведены к окружности касательная и секущая. Определить их длину, если касательная на 20 *см* меньше внутреннего отрезка секущей и на 8 *см* больше внешнего отрезка.

37. 1) Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Сумма их равна 30 *см*, а внутренний отрезок секущей на 2 *см* меньше касательной. Определить секущую и касательную.

2) Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Сумма их равна 15 *см*, а внешний отрезок секущей на 2 *см* меньше касательной. Определить секущую и касательную.

38. Отрезок AB продолжен на расстояние BC. На AB и AC, как на диаметрах, построены окружности. К отрезку AC в точке B проведён перпендикуляр BD до пересечения с большей окружностью. Из точки C проведена касательная CK к меньшей окружности. Доказать, что $CD = CK$.

-39. К данной окружности проведены две параллельные касательные и третья касательная, пересекающая их. Радиус есть средняя пропорциональная между отрезками третьей касательной. Доказать.

40. Даны две параллельные прямые на расстоянии 15 *дм* одна от другой; между ними дана точка M на расстоянии 3 *дм* от одной из них. Через точку M проведена окружность, касательная к обеим параллелям. Определить расстояние между проекциями центра и точки M на одну из данных параллелей.

41. В круг радиуса r вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма высоты и основания равна диаметру круга. Определить высоту.

42. Определить радиус круга, описанного около равнобедренного треугольника: 1) если основание равно 16 *см*, а высота 4 *см*; 2) если боковая сторона равна 12 *дм*, а высота 9 *дм*; 3) если боковая сторона равна 15 *м*, а основание 18 *м*.

43. В равнобедренном треугольнике основание равно 48 *дм*, а боковая сторона равна 30 *дм*. Определить радиусы кругов, описанного и вписанного, и расстояние между их центрами.

44. Радиус равен r, хорда данной дуги равна a. Определить хорду удвоенной дуги.

45. Радиус окружности равен 8 *дм*; хорда AB равна 12 *дм*. Через точку A проведена касательная, а из точки B — хорда BC, параллельная касательной. Определить расстояние между касательной и хордой BC.

46. Точка A удалена от прямой MN на расстояние a. Данным радиусом r описана окружность так, что она проходит через точку A и касается линии MN. Определить расстояние между полученной точкой касания и данной точкой A.

§ 5(12). Правильные многоугольники.

Обозначения: n — число сторон правильного многоугольника; a_n — сторона правильного вписанного многоугольника; b_n — сторона правильного описанного многоугольника; k_n — апофема правильного

вписанного многоугольника; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности.

1. 1) Вычислить центральный угол правильных 24-угольника и 16-угольника.

2) Какой правильный многоугольник имеет центральный угол, равный 30°? 12°?

2. Центральный угол правильного многоугольника и угол при вершине в сумме составляют 180°. Доказать.

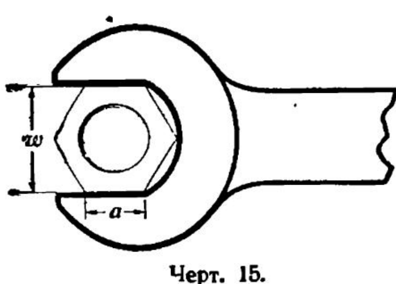
3. Определить величину угла правильного n-угольника ($n = 3$; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 25).

4. 1) Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внутренних углов которого равен 135°? 150°?

2) Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внешних углов которого равен 36°? 24°?

5. Конец валика диаметром в 4 *см* опилен под квадрат. Определить наибольший размер, который может иметь сторона квадрата.

6. Конец винта газовой задвижки имеет правильную трёхгранную форму. Какой наибольший размер может иметь каждая грань, если цилиндрическая часть винта имеет диаметр в 2 *см*?



Черт. 15.

7 Вычислить, какой размер отверстия w должен иметь ключ для правильной шестигранной гайки, если ширина грани гайки $a = 2,5$ *см*. Величина зазора между гранями гайки и ключа равна 0,5 *мм* (черт. 15).

8. 1) Вписать в окружность правильный 12-угольник, 15-угольник.

2) Описать около круга правильный 8-угольник, 10-угольник.

3) По данной стороне a построить правильный 8-угольник, 12-угольник.

9. 1) Хорда, перпендикулярная к радиусу в его середине, равна стороне правильного вписанного треугольника. Доказать.

2) Показать, что $k_6 = 0,5a_3$.

10. 1) В правильном треугольнике апофема равна $\frac{1}{3}$ высоты и $\frac{1}{2}$ радиуса описанного круга. Доказать.

2) Разность между радиусами окружностей, описанной около правильного треугольника и вписанной в него, равна m. Определить сторону треугольника.

11. 1) Сторона правильного многоугольника равна a; радиус круга, описанного около этого многоугольника, равен R. Определить радиус вписанного круга.

2) Сторона правильного многоугольника равна a; радиус вписанного в него круга равен r. Определить радиус описанного круга.

3) R — радиус описанного около многоугольника круга, r — радиус вписанного круга. Определить сторону этого многоугольника.

12. В окружность радиуса $R=4$ *см* вписан правильный 6-угольник. Найти проекции его сторон на каждую диагональ.

13. Доказать, что:

$$1)\ a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}};\quad 2)\ k_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

14. Доказать, что:

$$1)\ a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}};\quad 2)\ k_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

15. По данному $a_n = a$ определить R, если n равно: 1) 3; 2) 4; 3) 6; 4) 8; 5) 12.

16. По данному $a_n=a$ определить: 1) k_3; 2) k_4; 3) k_6.

17. По данному $k_n = k$ определить R, если n равно: 1) 3; 2) 4; 3) 6; 4) 8.

18. По данному R определить: 1) b_3; 2) b_4; 3) b_6.

19. По данному радиусу круга R и данной стороне a_n правильного вписанного n-угольника определить сторону b_n правильного описанного n-угольника.

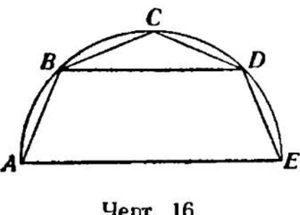
20. В круг радиуса $R=50$ *см* вписать правильный 7-угольник, воспользовавшись тем, что сторона правильного вписанного 7-угольника равна приблизительно половине стороны правильного вписанного треугольника.

21. Определить длину диагоналей правильного 8-угольника: 1) по данному радиусу R; 2) по данной стороне a.

22. Определить длину диагоналей правильного 12-угольника: 1) по данному радиусу R; 2) по данной стороне a.

23. Построить правильный пятиугольник по диагонали.

24. Самое простое мансардное покрытие образует в вертикальном сечении половину правильного 8-угольника (черт. 16).



Черт. 16.

Найти ширину перекрытия BD, сторону 8-угольника и высоту мансардной комнатки $ABDE$. Дано: $AE = 6$ *м*.

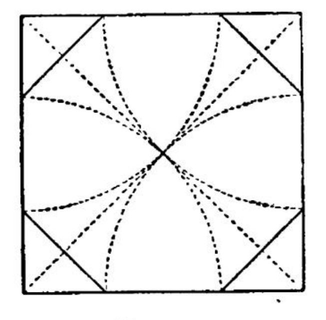
25. В окружность вписан и около неё описан правильные n-угольники. Найти отношение сторон этих n-угольников ($n=3$; $n = 6$).

26. В окружность радиуса R вписан правильный n-угольник, и середины его сторон последовательно соединены. Определить сторону нового n-угольника, если n равно: 1) 6; 2) 8.

27. 1) В правильном 8-угольнике со стороной a соединены середины четырёх сторон, взятых через одну так, что получился квадрат. Определить сторону квадрата.

2) В правильном 12-угольнике со стороной a соединены середины шести сторон, взятых через одну так, что получился правильный 6-угольник. Определить его сторону.

28. Построить правильный 8-угольник отсечением углов данного квадрата.



Черт. 17.

Чтобы превратить данный квадрат отсечением его углов в правильный 8-угольник, засекаем стороны (черт. 17) квадрата дугами, имеющими радиусами половину диагонали квадрата, а центрами — вершины квадрата. Доказать, что полученный 8-угольник будет правильным.

29. Путём срезывания углов превратить данный правильный треугольник со стороной a в правильный 6-угольник и определить его сторону.

30. В окружность радиуса R вписан правильный многоугольник со стороной a_n. Удвоить число сторон этого многоугольника и доказать, что $a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$.

31. Сторона правильного вписанного в окружность треугольника равна b. Найти радиус круга и сторону вписанного в окружность квадрата.

32. В окружность, радиус которой равен 4 *дм*, вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Определить радиус окружности, описанной около квадрата.

33. 1) В окружность радиуса R вписан правильный треугольник, в который вписан круг, а в этот круг вписан квадрат. Определить сторону этого квадрата.

2) Около правильного треугольника со стороной a описана окружность; около этой окружности описан квадрат, а около него — окружность. Определить радиус окружности, описанной около квадрата.

34. 1) Общая хорда двух пересекающихся окружностей равна a и служит для одной окружности стороной правильного вписанного треугольника, а для другой — стороной вписанного квадрата. Определить расстояние между центрами окружностей.

2) Центры двух пересекающихся окружностей лежат по одну сторону от их общей хорды, имеющей длину a и стягивающей в одной окружности дугу в 60°, а в другой — дугу в 30°. Определить расстояние между центрами.

35. ABC — вписанный правильный треугольник; AD — треть стороны AB; BE — треть стороны BC. Доказать, что отрезок DE равен радиусу.

36. Каждая сторона правильного треугольника, равная a, разделена на три равные части, и соответственные точки деления (считая в одном направлении) соединены между собой, отчего получился новый треугольник. Определить радиус вписанного в него круга.

37. Вписать в данный квадрат другой с данной стороной. Всегда ли разрешима задача?

38. В ромб вписать квадрат, стороны которого параллельны диагоналям ромба.

39. Один из двух квадратов со стороной a, наложенных друг на друга, повёрнут около центра на 45°. Определить периметр образовавшейся при этом звезды.

40. 1) Диагонали правильного пятиугольника в свою очередь образуют правильный пятиугольник. Доказать.

2) Если стороны правильного пятиугольника продолжить до взаимного пересечения, то получается звёздчатый пятиугольник с равными сторонами (пентаграмма). Доказать.

41. 1) Окружность радиуса R разделена на шесть равных частей, и точки деления соединены хордами через одну. Определить сторону полученной шестиугольной звезды.

2) Окружность радиуса R разделена на восемь равных частей, и точки деления соединены хордами через одну. Определить сторону восьмиугольной звезды.

42. По данному радиусу R определить хорду дуги, которая содержит: 1) 135°; 2) 150°.

43. Определить отношение между сторонами треугольника, если его углы относятся, как $1:2:3$.

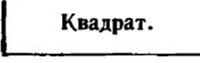
44. Середина полуокружности соединена с концами диаметра, и через середины соединяющих отрезков проведена хорда. Каждый из боковых отрезков хорды равен c. Определить радиус круга.

45. В сегмент с дугой в 120° и высотой h вписан прямоугольник, у которого основание в 4 раза больше высоты. Определить высоту прямоугольника.

46. n равных кругов, касающихся между собой, касаются данного круга, радиус которого равен R. Определить радиус этих кругов, если число их n равно: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

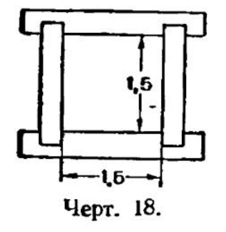
47. На каждой из двух половин данного отрезка построены, как на диаметрах, два круга, и из каждого конца этого отрезка проведены касательные к кругу, построенному у другого конца. Доказать, что отрезок, соединяющий точки пересечения касательных, равен стороне квадрата, вписанного в один из построенных кругов.

§ 6(13). Площади прямолинейных фигур.



1. Вычислить площадь сечения дорожной трубы, изображённой на чертеже 18 (размеры даны в метрах).

2. Железная проволока с сечением в 1 $мм^2$ разрывается от груза в 40 *кГ*. Какой нагрузкой разорвётся железный стержень, поперечное сечение которого — квадрат со стороной в 24 *мм*?



Черт. 18.

3. Стороны двух участков земли квадратной формы равны 100 *м* и 150 *м*. Определить сторону квадратного участка земли, равновеликого обоим.

4. 1) Определить площадь квадрата по его диагонали l.

2) Определить площадь квадрата, вписанного в круг радиуса R.

3) Во сколько раз площадь описанного квадрата больше площади вписанного (в тот же круг)?

5. 1) Как изменится площадь квадрата, если каждую его сторону увеличить в 3 раза? уменьшить в 1,5 раза?

2) Как надо изменить каждую сторону квадрата, чтобы площадь его увеличилась в 4 раза? уменьшилась в 25 раз?

6. Площадь плана квадратного участка земли (масштаб 1 : 10000) равна 552,25 *см*². Найти площадь участка в натуре.

Прямоугольник.

7. Танк лёгкого типа весит 6880 *кГ*, ширина его гусениц 0,35 *м*, длина части гусениц, соприкасающихся с грунтом, 2,05 *м* (с каждой стороны). Какой вес приходится на 1 *дм*² рабочей площади гусениц?

8. Заводское здание прямоугольной формы имеет длину 82,5 *м* и ширину 26,5 *м*. Определить в арах площадь застроенного участка земли.

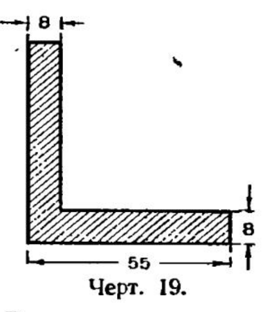
9. Прямоугольный участок земли содержит 400 *га*; длина участка 8 *км*; найти длину границы участка (периметр).

10. 1) Определить стороны прямоугольника, если они относятся, как 4 : 9, а площадь равна 144 *м*².

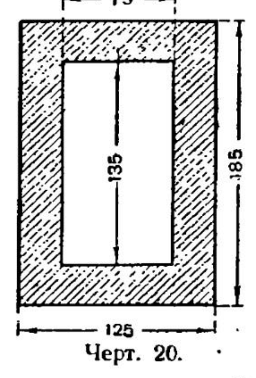
2) Определить стороны прямоугольника, если его периметр равен 74 *дм*, а площадь 3 *м*².

11. Стороны прямоугольника равны 72 *м* и 8 *м*. Определить сторону равновеликого ему квадрата.

12. Вычислить площадь поперечного сечения равнобокого углового железа (черт. 19, размеры даны в миллиметрах).



Черт. 19.



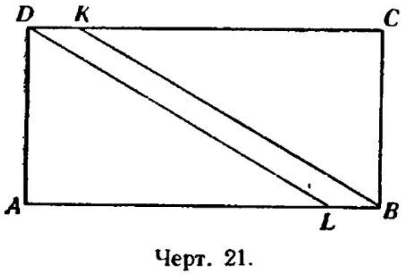
Черт. 20.

13. Вычислить площадь поперечного сечения трубы, изображённого на чертеже 20 (размеры даны в миллиметрах).

14. Диагональ прямоугольника равна 305 *см*, а площадь равна 37 128 $см^2$. Определить периметр этого прямоугольника.

Параллелограмм.

15. Через поле, имеющее форму прямоугольника $ABCD$ (черт. 21), должна пройти железная дорога. Известно, что $AB = 125$ *м*, $BC = 72,5$ *м*, $AL = KC = 114,6$ *м*. Вычислить площадь отчуждаемой полосы $BLDK$.



Черт. 21.

16. Площадь параллелограмма содержит 480 $см^2$; его периметр равен 112 *см*; расстояние между бо́льшими сторонами равно 12 *см*. Определить расстояние между меньшими сторонами.

17. Определить площадь параллелограмма по двум высотам его h_1 и h_2 и периметру $2p$.

18. Определить площадь параллелограмма по двум сторонам и углу между ними: 1) a, b, 30°; 2) a, b, 45°; 3) a, b, 60°.

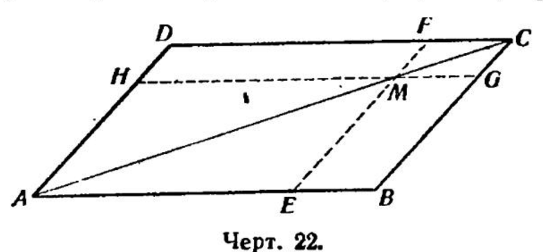
19. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найти острый угол параллелограмма, если площадь его равна половине площади прямоугольника.

20. Начертить квадрат и ромб, периметры которых одинаковы. Площадь которой из этих фигур больше? почему?

21. Определить площадь ромба, если его высота равна 12 *см*, а меньшая диагональ 13 *см*.

22. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB = 37$ *см*, а перпендикуляр, проведённый из точки пересечения диагоналей на сторону AD, делит её на отрезки: $AE = 26$ *см* и $ED = 14$ *см*. Определить площадь параллелограмма.

23. 1) В параллелограмме $ABCD$ (черт. 22) проведена



Черт. 22.

диагональ AC, и на ней взята произвольная точка M. Через M проведены прямые, параллельные сторонам параллелограмма: $EF \parallel BC$ и $GH \parallel CD$. Доказать, что образовавшиеся при этом параллелограммы $DHMF$ и $EBGM$, через которые диагональ не проходит, равновелики.

2) Параллелограмм имеет стороны $a = 8$ *см* и $b = 4$ *см*. Превратить его в равновеликий ему параллелограмм с таким же углом и с основанием $b = 6$ *см*.

24. В данном квадрате каждая вершина соединена с серединой стороны, лежащей между двумя следующими вершинами (считая вершины в одинаковом порядке). Соединительные прямые образуют своим пересечением внутренний квадрат. Доказать (вычислением), что его площадь составляет $\frac{1}{5}$ площади данного квадрата.

25. В прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон находится на гипотенузе. Боковые отрезки гипотенузы равны m и n. Определить площадь этого квадрата.

26. Из каждой вершины данного квадрата проведена в следующую вершину внутренняя дуга в 120°, и точки пересечения дуг соединены между собой, отчего получился внутренний квадрат. Найти отношение площадей квадратов.

27. Из точки, взятой на гипотенузе, опущены перпендикуляры на оба катета. Определить площадь прямоугольника, образованного этими перпендикулярами, если отрезки катетов при гипотенузе равны m и n.

28. В треугольник, у которого основание равно 30 *см*, а высота 10 *см*, вписан прямоугольник с площадью в 63 *см*^{2}. Определить стороны этого прямоугольника.

Треугольник.

29. Воздух давит с силой 1,03 *кГ* на каждый квадратный сантиметр. Найти давление воздуха на треугольную площадку, основание которой равно 0,13 *м*, высота 0,18 *м*.

30. Определить площадь треугольника, если его основание и высота соответственно равны: 1) 32 *см* и 18 *см*; 2) 5 *дм* и 4 *м*; 3) $\sqrt{5}$ и $\sqrt{20}$.

31. 1) Построить треугольник, равновеликий треугольнику ABC, сохраняя сторону BC, но заменяя угол ABC данным углом α.

2) Построить равнобедренный треугольник с основанием BC, равновеликий данному треугольнику ABC.

32. 1) Разделить данный треугольник на три равновеликих треугольника прямыми, выходящими из одной вершины.

2) Данный параллелограмм разделить на четыре равновеликие части прямыми, выходящими из одной вершины.

3) Данный параллелограмм разделить на три равновеликие части прямыми, выходящими из одной вершины.

33. Определить площадь треугольника по сторонам a и b и углу между ними: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

34. Если две стороны треугольника равны 3 *см* и 8 *см*, то может ли его площадь быть равна: 1) 10 *см*²; 2) 15 *см*²; 3) 12 *см*²?

35. 1) Определить площадь прямоугольного треугольника, в котором гипотенуза равна 313 *см*, а один из катетов 312 *см*.

2) Площадь прямоугольного треугольника равна 720 *см*², а катеты относятся, как 9 : 40. Определить гипотенузу.

3) По данным катетам a и b определить высоту, проведённую на гипотенузу.

36. Определить площадь равнобедренного прямоугольного треугольника по его гипотенузе c.

37. Определить площадь равнобедренного треугольника, если его основание и боковая сторона соответственно равны: 1) 56 *см* и 1 *м*; 2) b и c; 3) 20 *см* и 11 *см*.

38. Через точку K, данную на стороне AB треугольника ABC, провести прямую так, чтобы она разделила площадь треугольника пополам.

39. 1) Определить площадь равностороннего треугольника по его стороне a.

2) Определить сторону равностороннего треугольника по его площади Q.

3) Определить площадь равностороннего треугольника по его высоте h.

40. 1) Определить площадь правильного треугольника, вписанного в круг радиуса R.

2) Определить площадь правильного описанного треугольника, если радиус круга равен r.

41. Определить площадь прямоугольного треугольника, если его высота делит гипотенузу на отрезки в 32 *см* и 18 *см*.

42. Определить площадь треугольника, если его высота равна 36 *см*, а боковые стороны 85 *см* и 60 *см*.

43. Определить катеты прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 73 *см*, а площадь равна 1320 *см*^{2}.

44. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10 *см*, а площадь равна 48 *см*^{2}. Определить основание.

45. 1) Определить площадь ромба, диагонали которого равны 72 *см* и 40 *см*.

2) Определить высоту ромба, если его диагонали равны 16 *м* и 12 *м*.

46. Определить сторону ромба, если его диагонали относятся, как $m : n$, а площадь равна Q.

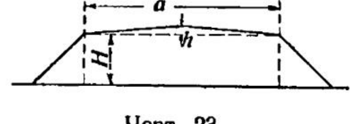
47. Из середины основания треугольника проведены прямые, параллельные сторонам. Доказать, что площадь полученного таким образом параллелограмма равна половине площади треугольника.

48. Если какую-нибудь точку внутри параллелограмма соединить со всеми его вершинами, то сумма площадей двух противолежащих треугольников равна сумме площадей двух других. Доказать это.

49. Превратить треугольник в равновеликий ему параллелограмм.

50. Превратить данный многоугольник в равновеликий ему многоугольник, число сторон которого на одну меньше, чем у данного многоугольника.

51. Ширина полотна дороги $a = 6{,}74$ *м* (черт. 23), стрела (h) подъёма полотна над насыпью должна составлять 2% ширины полотна, высота насыпи $H = 1{,}5$ *м*, и откосы наклонены к линии горизонта под углом в 45°. Вычислить площадь поперечного профиля дороги.



Черт. 23.

✓ **52.** Определить площадь треугольника, если основание равно a, а углы при основании 30° и 45°.

53. Равные прямоугольные треугольники ACB и ADB находятся по одну сторону общей гипотенузы AB; при этом $AD = BC = 12$ *см* и $AC = BD = 16$ *см*. Определить площадь общей части данных треугольников.

54. На сторонах равностороннего треугольника построены квадраты, и свободные вершины их соединены. Определить площадь полученного шестиугольника, если сторона данного треугольника равна a.

55. Данный квадрат со стороной *a* срезан по углам так, что образовался правильный восьмиугольник. Определить площадь этого восьмиугольника.

56. Отношение катетов прямоугольного треугольника равно 1,05; разность между радиусами описанного и вписанного кругов 17 *дм*. Определить площадь треугольника.

57. В ромбе, диагонали которого равны 150 *см* и 200 *см*, проведены из вершины тупого угла высоты, и концы их соединены. Определить площадь получившегося таким образом треугольника.

58. AB и CD — два параллельных отрезка; M — точка пересечения линий AB и BC (соединяющих концы отрезков накрест). Отрезок $AB = 8$ *см*, отрезок $CD = 12$ *см*, расстояние между ними равно 10 *см*. Определить сумму площадей треугольников ABM и MCD.

Формула Герона.

59. Определить площадь треугольника по трём данным сторонам:

1) 13; 14; 15. 2) 29; 25; 6. 3) 5; 6; 9. 4) 3; 5; 7. 5) 6; 5; 2,2. 6) 5; $8\frac{2}{3}$; $12\frac{1}{3}$. 7) 5; 4; $\sqrt{17}$. 8) 5; $\sqrt{58}$; $\sqrt{65}$. 9) $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{13}$.

60. 1) Определить меньшую высоту треугольника, стороны которого равны 25 *дм*; 29 *дм*; 36 *дм*.

2) Определить бо́льшую высоту треугольника со сторонами: 15; 112; 113.

61. Определить стороны треугольника: 1) если они относятся, как 26 : 25 : 3, а площадь треугольника равна 9 $м^2$; 2) если стороны относятся, как 9 : 10 : 17, а площадь равна 144 $см^2$.

62. Определить площадь четырёхугольника по диагонали, равной 17 *см*, и сторонам: 10 *см* и 21 *см*, лежащим по одну сторону диагонали, 8 *см* и 15 *см* — по другую сторону диагонали.

63. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 17 *см* и 39 *см*, а расстояние между центрами 44 *см*. Определить длину общей хорды.

64. Определить площадь параллелограмма, если одна из его сторон равна 51 *см*, а диагонали равны 40 *см* и 74 *см*.

65. Определить площадь треугольника, если две стороны его соответственно равны 27 *см* и 29 *см*, а медиана третьей стороны равна 26 *см*.

66. В треугольнике по данным двум сторонам и площади

определить третью сторону: 1) $a = 17$, $b = 28$, $S = 210$; 2) $a = 7$, $b = 11$, $S = \sqrt{1440}$.

67. В треугольнике ABC даны три стороны: $AB = 26$, $BC = 30$ и $AC = 28$. Определить часть площади этого треугольника, заключённую между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины B.

68. Стороны треугольника 13 *см*, 14 *см* и 15 *см*. Определить радиус окружности, которая имеет центр на средней стороне и касается двух других сторон.

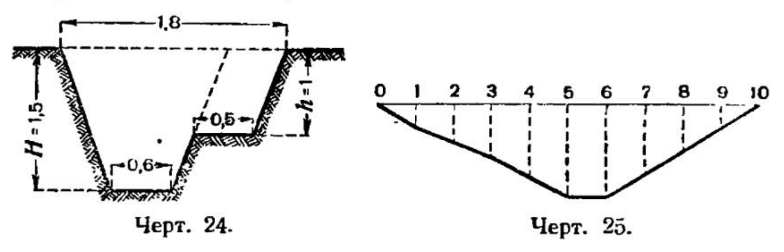
69. Вершины данного треугольника соединены с центром вписанного круга. Проведёнными прямыми площадь треугольника разделилась на три части: 28 $м^2$, 60 $м^2$ и 80 $м^2$. Определить стороны данного треугольника.

70. В четырёхугольнике $ABCD$ дано: $AB = 26$ *см*, $BC = 30$ *см*, $CD = 17$ *см*, $AD = 25$ *см* и диагональ $AC = 28$ *см*. Определить площадь четырёхугольника и диагональ BD.

Площадь трапеции.

71. 1) Основания трапеции равны 35 *см* и 29 *см*, а площадь 256 $см^2$. Определить высоту трапеции.

2) В трапеции высота равна 8 *см*, а площадь 2 $дм^2$. Определить длину средней линии.



Черт. 24. Черт. 25.

3) Площадь трапеции равна 144 $см^2$, основания относятся, как 4 : 5; высота равна 16 *см*. Определить основания.

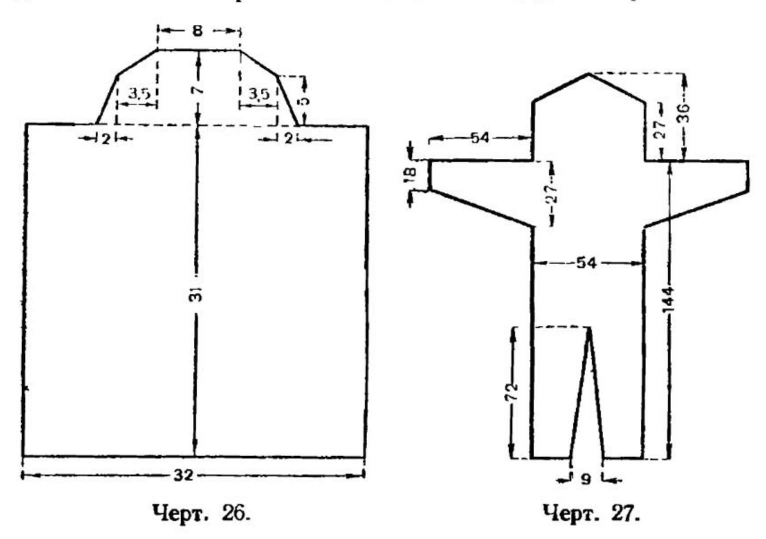
72. Определить площадь поперечного сечения окопа (черт. 24). Размеры даны в метрах.

73. Вычислить площадь поперечного сечения реки, данного на чертеже 25 (площадь «живого сечения»), по данным в таблице размерам глубины.

Расстояние от берега в метрах	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Глубина в метрах	0	0,65	0,9	1,5	1,85	2,4	2,35	1,75	1,25	0,6	0

74. Чертёж 26 представляет собой план столовой в рабочем клубе; размеры даны в метрах. Определить площадь столовой.

75. Для изготовления костюма военной маскировки пользуются выкройкой, указанной на чертеже 27; размеры даны в сантиметрах. Вычислить площадь выкройки.



Черт. 26. Черт. 27.

76. 1) Площадь трапеции $ABCD$ разделена пополам прямой EF, проведённой параллельно боковой стороне AB. Определить отрезок AF, если $AD = 28$ *см* и $BC = 12$ *см*.

2) Площадь трапеции делится диагональю в отношении 3 : 7. В каком отношении она делится средней линией (начиная от меньшего основания)?

77. В равнобедренной трапеции основания равны 51 *см* и 69 *см*, а боковая сторона 41 *см*. Определить площадь.

78. Определить площадь равнобедренной трапеции, в которой основания равны 42 *см* и 54 *см*, а угол при большем основании равен 45°.

79. В прямоугольной трапеции острый угол при основании равен 30°, сумма оснований равна m и сумма боковых сторон равна n. Определить площадь трапеции.

80. Определить площадь трапеции, у которой параллельные стороны 60 *см* и 20 *см*, а непараллельные 13 *см* и 37 *см*.

81. В равнобедренной трапеции большее основание равно 44 *м*, боковая сторона равна 17 *м* и диагональ равна 39 *м*. Определить площадь этой трапеции.

82. 1) Определить площадь равнобедренной трапеции, у которой основания равны 12 *см* и 20 *см*, а диагонали взаимно перпендикулярны.

2) Определить площадь равнобедренной трапеции, у которой диагонали взаимно перпендикулярны, а высота равна h.

83. Определить площадь равнобедренной трапеции, если её диагональ равна c и образует с бо́льшим основанием угол в 45°.

84. Определить площадь равнобедренной трапеции, у которой основания равны 10 *см* и 26 *см*, а диагонали перпендикулярны к боковым сторонам.

85. Определить площадь трапеции, у которой основания равны 142 *см* и 89 *см*, а диагонали 120 *см* и 153 *см*.

86. В круге радиуса R по одну сторону центра проведены две параллельные хорды, стягивающие дуги в 60° и 120°, и концы их соединены. Определить площадь полученной трапеции.

87. В равнобедренной трапеции, описанной около круга, боковая сторона равна a, а острый угол при основании равен 30°. Определить площадь этой трапеции.

88. 1) Основание треугольника равно 75 *см*, а боковые стороны 65 *см* и 70 *см*. Высота разделена в отношении 2 : 3 (считая от вершины), и через точку деления проведена прямая, параллельная основанию. Определить площадь получившейся при этом трапеции.

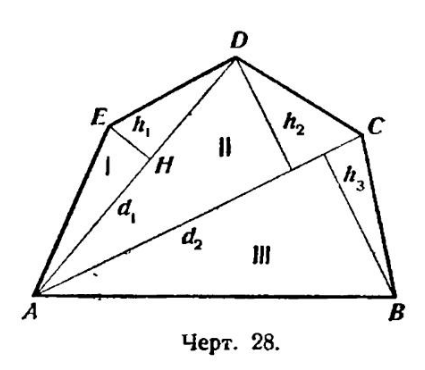
2) Диагонали трапеции 20 *м* и 15 *м*; высота равна 12 *м*. Определить площадь трапеции.

89. Основания и боковая сторона равнобедренной трапеции относятся, как 10 : 4 : 5. Площадь её равна 112 $см^2$. Найти периметр трапеции.

Площадь многоугольника.

90. На чертеже 28 дан план участка земли в масштабе 1 : 10 000. На плане измерены его диагонали d_1 и d_2 и высоты h_1, h_2, h_3. Дано: $d_1 = 44$ *мм*; $d_2 = 50$ *мм*; $h_1 = 7$ *мм*; $h_2 = 20{,}4$ *мм* и $h_3 = 21{,}6$ *мм*. Выразить площадь участка в гектарах.

91. Вычислить площадь участка земли, план которого дан на чертеже 29; размеры даны в метрах.

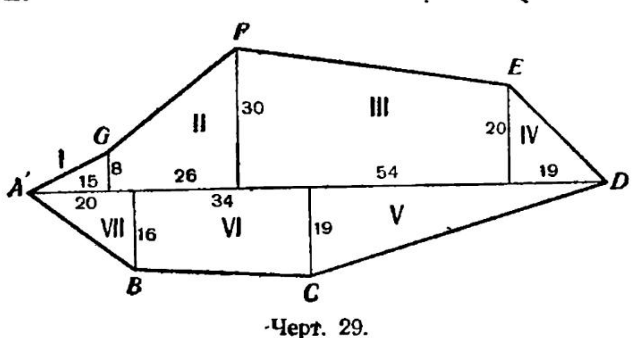


Черт. 28.

92. Определить площадь четырёхугольника, если его диагонали равны k и l и 1) взаимно перпендикулярны, 2) образуют угол в 30°.

93. На сторонах прямоугольника построены вне его равносторонние треугольники, и свободные вершины их соединены. Определить площадь получившегося четырёхугольника, если стороны данного прямоугольника равны a и b.

94. На отрезке AE взята точка C так, что $AC = a$ и $CE = b$. На отрезках AC и CE построены по одну сторону равносторонние треугольники ABC и CDE, и вершины B и D соединены. Определить площадь четырёхугольника $ABDE$.



Черт. 29.

95. Пусть M будет середина стороны AD в четырёхугольнике $ABCD$. Дано: $MB \perp AB$; $MC \perp CD$; $AD = 50$ *см*, $AB = 15$ *см* и $CD = 7$ *см*. Требуется определить площадь $ABCD$.

96. На окружности радиуса r последовательно взяты дуги: $AB = 30°$, $BC = 60°$, $CD = 90°$ и $DE = 120°$ и составлен пятиугольник $ABCDE$. Определить площадь этого пятиугольника.

97. 1) Периметр описанного многоугольника равен 60 *см*, а площадь содержит 240 *см*². Определить радиус круга.

2) Около окружности радиуса, равного 25 *см*, описан

многоугольник, площадь которого равна 20 $дм^2$. Определить его периметр.

98. Определить площадь правильного треугольника, описанного около окружности радиуса r.

99. Сторона правильного шестиугольника равна 84 *см*; вычислить сторону равновеликого ему правильного треугольника.

100. Пол в комнате желают выстлать паркетом в форме правильного шестиугольника со стороной в 12 *см*. Предполагаемая к покрытию таким паркетом площадь пола имеет следующие размеры: 7,48 *м* в длину и 3,25 *м* в ширину. Определить нужное число паркетных плиток.

101. Комната длиной 5,6 *м* и шириной 4,5 *м* имеет балкон в форме половины правильного шестиугольника со стороной 1,6 *м*. Определить площадь пола комнаты и балкона.

102. 1) По данному радиусу R определить площадь правильного вписанного шестиугольника.

2) По данному радиусу r определить площадь правильного описанного шестиугольника.

3) Определить сторону правильного шестиугольника по его площади S.

103. По данному радиусу R определить площадь правильных вписанных восьмиугольника и двенадцатиугольника.

104. Сечение железобетонной сваи имеет вид правильного восьмиугольника. Наибольшее расстояние между противоположными вершинами равно 224 *мм*. Определить площадь сечения.

105. Расстояние между противоположными гранями восьмигранного железа равно 36 *мм*. Вычислить площадь поперечного сечения.

106. 1) По данной площади Q правильного вписанного двенадцатиугольника определить площадь правильного шестиугольника, вписанного в ту же окружность.

2) По данной площади Q правильного вписанного восьмиугольника определить площадь квадрата, вписанного в ту же окружность.

107. 1) Окружность радиуса R разделена на шесть равных частей, и точки деления соединены через одну. Определить площадь полученной шестиугольной звезды.

2) Окружность радиуса R разделена на восемь равных частей, и точки деления соединены через одну. Определить площадь полученной восьмиугольной звезды.

Сравнение площадей треугольников и многоугольников.

108. 1) Всякая прямая, проходящая через центр симметрии параллелограмма, делит его на две равновеликие части. Доказать.

2) Провести через данную точку прямую, делящую площадь данного параллелограмма пополам.

109. Разделить данный параллелограмм на n равновеликих частей прямыми, исходящими из его вершины, если: 1) $n=6$; 2) $n=5$.

110. Середина одной из диагоналей четырёхугольника соединена с концами другой диагонали. Доказать, что полученная ломаная делит четырёхугольник на две равновеликие части.

111. Если диагональ какого-нибудь четырёхугольника делит другую диагональ пополам, то она делит пополам и площадь четырёхугольника. Доказать.

112. 1) Прямая, проходящая через середины параллельных сторон трапеции, делит её на две равновеликие части. Доказать.

2) На прямой, соединяющей середины оснований трапеции, взята точка и соединена со всеми вершинами трапеции. Доказать, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам трапеции, равновелики.

113. 1) Диагонали трапеции делят её на четыре треугольника. Доказать, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики.

2) Если в трапеции середину M одной боковой стороны AB соединить с концами другой боковой стороны CD, то площадь полученного треугольника CMD составит половину площади трапеции. Доказать.

114. Диагональ трапеции делит её площадь в отношении $3:7$. В каком отношении разделится площадь этой трапеции, если из конца верхнего основания провести прямую, параллельную боковой стороне?

115. 1) Построить квадрат, равновеликий сумме двух данных квадратов со сторонами a и b ($a=5$ *см* и $b=12$ *см*).

2) Построить квадрат, площадь которого в три раза больше площади данного квадрата со стороной a.

116. На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты, и свободные вершины их соединены.

Определить площадь получившегося шестиугольника, если катеты данного треугольника равны a и b.

117. Как относятся между собой площади P и Q двух треугольников, имеющих по равному углу, заключённому в первом треугольнике между сторонами в 12 *дм* и 28 *дм*, а во втором — между сторонами в 21 *дм* и 24 *дм*?

118. В треугольнике ABC сторона BA продолжена на длину $AD = 0{,}2BA$ и сторона BC — на длину $CE = \frac{2}{3}BC$; точки D и E соединены. Найти отношение площадей треугольников ABC и DBE.

119. Свойство биссектрисы треугольника вывести из сравнения площадей.

120. Во сколько раз увеличится площадь треугольника, если каждую его сторону увеличить в 4 раза? в 5 раз?

121. Сторона треугольника равна 5 *дм*. Чему равна сходственная сторона подобного ему треугольника, площадь которого вдвое больше?

122. Какую часть площади (считая от вершины) отсекает средняя линия треугольника?

123. Высота треугольника равна h. На каком расстоянии от вершины находится параллель к основанию, делящая площадь треугольника пополам?

124. 1) Боковая сторона треугольника разделена в отношении $2:3:4$ (от вершины к основанию), и из точек деления проведены прямые, параллельные основанию. В каком отношении разделилась площадь треугольника?

2) Через точку E, делящую сторону AB треугольника ABC в отношении $m:n$, проведена параллель к BC. В каком отношении находятся площадь отсечённого треугольника и площадь получившейся трапеции?

125. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его боковую сторону в отношении $5:3$ (начиная от вершины), а площадь — на части, разность которых равна 56 $см^2$. Определить площадь всего треугольника.

126. Прямыми, параллельными основанию, площадь треугольника разделилась в отношении $9:55:161$ (от вершины к основанию). В каком отношении разделились боковые стороны?

127. Какую часть площади одноимённых описанных фигур составляют площади следующих вписанных: 1) правильного треугольника; 2) квадрата; 3) правильного шестиугольника? (Решить, не вычисляя самих площадей).

128. Сумма площадей трёх подобных многоугольников равна 232 $дм^2$, а периметры их относятся, как 2 : 3 : 4. Определить площадь каждого многоугольника.

129. На сторонах прямоугольного треугольника построены подобные фигуры, причём стороны треугольника являются сходственными сторонами этих фигур. Доказать, что площадь фигуры, построенной на гипотенузе, равна сумме площадей фигур, построенных на катетах.

130. 1) Построить квадрат, равновеликий разности двух данных квадратов. 2) Построить квадрат, равновеликий сумме n данных квадратов.

131. Построить треугольник, равновеликий данному многоугольнику.

132. Дано отношение сторон двух квадратов и один из них; построить другой квадрат.

133. В параллелограмме соединены середина каждой стороны с концом следующей стороны, отчего получился внутренний параллелограмм. Доказать, что его площадь составляет $\frac{1}{5}$ площади данного параллелограмма.

134. Как относятся между собой основания такой трапеции, которая равновелика своему дополнительному треугольнику?

135. Площадь прямоугольного треугольника разделена пополам прямой, перпендикулярной к гипотенузе. Найти расстояние между этой прямой и вершиной меньшего острого угла, если больший катет равен 20 *м*.

136. В прямоугольном треугольнике катеты относятся, как 3 : 4, а высота делит площадь треугольника на части, разность которых равна 84 $дм^2$. Определить площадь всего треугольника.

137. 1) Три медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Доказать, что площадь треугольника AMB составляет треть площади треугольника ABC.

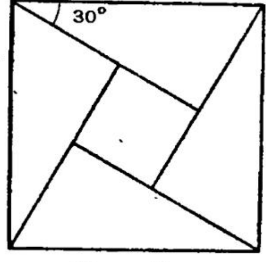
2) Три медианы треугольника делят его площадь на шесть равных частей. Доказать.

138. Из внешней точки A проведены к кругу касательная AB и секущая ACD. Определить площадь треугольника CBD, если $AC : AB = 2 : 3$ и площадь $\triangle ABC = 20$ $дм^2$.

139. AB и CD — две непересекающиеся хорды, причём $\smile AB = 120°$ и $\smile CD = 90°$; M — точка пересечения хорд AD и BC. Определить площади AMB и CMD, если их сумма содержит 100 $см^2$.

140. AB — диаметр; BC и AC — хорды, причём $\smile BC = 60°$; D — точка пересечения продолженного диаметра и касательной CD. Найти отношение площадей DCB и DCA.

141. Каждая сторона квадрата повёрнута на 30° внутрь квадрата, как указано на чертеже 30. Определить отношение сторон и площадей данного квадрата и квадрата, образованного повёрнутыми сторонами.



Черт. 30.

142. $ABCD$ — данный квадрат; E и F — середины сторон CD и AD; M — точка пересечения прямых BE и FC. Доказать, что площадь $\triangle BMC$ составляет $\frac{1}{5}$ площади квадрата.

143. Треугольник и вписанный в него ромб имеют общий угол. Стороны треугольника, заключающие этот угол, относятся, как $m:n$. Найти отношение площади ромба к площади треугольника.

§ 7(14). Определение в треугольнике: медиан, биссектрис и радиусов описанного и вписанного кругов.

Вычисление медиан.

1. Стороны треугольника равны a, b и c. Доказать, что медиана m_c, проведённая к стороне c, равна $\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$.

2. 1) Основание треугольника равно 22 *дм*, а боковые стороны 13 *дм* и 19 *дм*. Определить медиану основания.

2) Определить все медианы треугольника, в котором $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.

3. В треугольнике две стороны равны 11 и 23 и медиана третьей стороны 10. Найти третью сторону.

4. В треугольнике одна из сторон равна 26 *дм*, а её медиана равна 16 *дм*. Определить две другие стороны этого треугольника, если они относятся, как 3 : 5.

5. Медианы равнобедренного треугольника равны 15, 15 и 18. Найти площадь треугольника.

6. Основание треугольника равно 23; медианы боковых сторон равны 15 и $22\frac{1}{2}$. Найти третью медиану.

7. 1) Построить треугольник по основанию и двум медианам, исходящим из концов основания.

2) Основание треугольника равно 10, а медианы двух других сторон равны 9 и 12. Найти площадь треугольника.

8. 1) Построить треугольник по трём медианам.

2) Медианы треугольника равны 9, 12 и 15. Найти площадь треугольника.

Биссектрисы.

9. Квадрат биссектрисы угла при вершине треугольника равен разности между произведением боковых сторон и произведением отрезков основания. Доказать.

10. В треугольнике ABC определить биссектрису угла A при следующей длине сторон: 1) $a = 7$, $b = 6$, $c = 8$; 2) $a = 18$, $b = 15$, $c = 12$; 3) $a = 39$, $b = 20$, $c = 45$.

11. В треугольнике две стороны равны 6 и 12, а угол между ними 120°. Определить биссектрису данного угла.

12. По данным двум сторонам треугольника и биссектрисе угла между ними определить отрезки третьей стороны: $b = 20$; $c = 45$; $b_A = 24$.

Радиусы вписанного и описанного кругов.

13. 1) Доказать, что в прямоугольном треугольнике радиус вписанного круга равен половине разности между суммой катетов и гипотенузой.

2) Катеты равны 40 *см* и 42 *см*. Определить радиусы кругов описанного и вписанного.

14. Определить относительное положение центра описанного около треугольника круга, если даны три стороны треугольника или отношение их: 1) 5, 8, 10; 2) 8: 7: 5; 3) 80, 315, 325.

15. Доказать, что во всяком треугольнике произведение двух сторон равно произведению диаметра описанного круга на высоту, опущенную на третью сторону.

16. Площадь треугольника равна S; его периметр равен $a + b + c = 2p$. Доказать, что: 1) радиус вписанного круга $r = \frac{S}{p}$; 2) радиус описанного круга $R = \frac{abc}{4S}$.

17. Для треугольника определить R и r при следующей длине сторон: 1) 13, 14, 15; 2) 15, 13, 4; 3) 35, 29, 8; 4) 4, 5, 7.

18. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 6, высота равна 4. Найти радиус описанного круга.

19. В круг радиуса R вписан треугольник; один из его углов равен: 1) 30°; 2) 45°. Найти противолежащую сторону треугольника.

20. Доказать справедливость формулы:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}.$$

21. Определить площадь треугольника по данному радиусу R описанного круга и двум углам, содержащим 45° и 60°.

22. Определить катеты прямоугольного треугольника, если они относятся между собой, как 20 : 21, а разность между радиусами кругов описанного и вписанного равна 17 *см*.

23. В круг радиуса R вписан прямоугольник $ABCD$. Определить площадь этого прямоугольника, если дуга AB содержит α градусов [α равно: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°].

§ 8(15). Длина окружности и дуги. Площадь круга и его частей.

Длина окружности и дуги.

1. Вычислить длину окружности, если радиус равен: 1) 10 *м*; 2) 15 *м*; 3) 35 *см*.

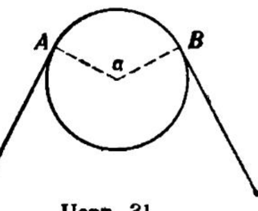
2. Вычислить радиус, если длина окружности равна: 1) 1 *м*; 2) 25 *см*; 3) 4,75 *дм*.

3. Расстояние между серединами двух зубцов зубчатого колеса, имеющего 0,66 *м* в диаметре, равно 34,5 *мм*, считая по дуге. Сколько зубцов имеет колесо?

4. Шкив имеет в диаметре 1,4 *м* и делает 80 оборотов в минуту. Определить скорость точки, лежащей на окружности шкива.

5. По данному радиусу R определить длину дуги, содержащей: 1) 45°; 2) 24°30′; 3) 5°14′15″.

6. Определить радиус дуги, если её длина равна l, а градусная мера: 1) 135°; 2) 10°40′.



Черт. 31.

7. Окружность шкива (черт. 31) имеет длину 540 *мм*, ремень касается шкива по дуге длиной 200 *мм*. Определить угол обхвата шкива ремнём (α).

8. Радиус железнодорожного закругления равен 1200 *м*; длина дуги равна 450 *м*. Сколько градусов содержит дуга?

9. 1) Окружность радиуса 2 *см* разогнута в дугу радиуса 5 *см*. Найти получившийся центральный угол.

2) Дуга радиуса 4 *см*, измеряющая центральный угол в 120°, равна длине некоторой окружности. Найти радиус этой окружности.

3) Окружность радиуса 6 *см* разогнута в дугу, измеряющую центральный угол в 300°. Найти радиус дуги.

10. Определить число градусов дуги, если дан её радиус R и длина l: 1) $R=10$, $l=45$; 2) $R=15$, $l=6$.

11. Сколько градусов и минут в дуге, длина которой равна радиусу $\left(\frac{1}{\pi}\approx 0{,}31831\right)$?

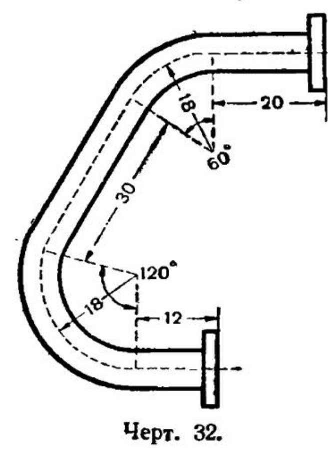
12. По данной хорде a определить длину её дуги, если она содержит: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.

13. По данной длине дуги l определить её хорду, если дуга содержит: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.

14. Определить радиус окружности, если она длиннее своего диаметра на 107 *см*.

15. 1) На сколько увеличится длина окружности, если радиус увеличить на m?

2) Вообразим, что земной шар обтянут по экватору обручем и что подобным же образом обтянут и футбольный мяч по его большому кругу. Далее вообразим, что окружность каждого обруча удлинилась на 1 *м*. Тогда обручи отойдут от поверхности тел, которые они раньше стягивали, и останется некоторый зазор (промежуток). Где этот зазор был бы больше: у земного шара или мяча?



Черт. 32.

16. 1) Железная труба со стенками толщиной в 6 *мм* имеет внешнюю окружность в 22 *см*. Найти длину внутренней окружности.

2) Из двух концентрических окружностей одна равна 167 *см*, а другая 117 *см*. Определить ширину кольца.

17. Определить длину окружности, если она более периметра правильного вписанного шестиугольника на 7 *см*.

18. Дуга сегмента содержит 120° и имеет длину l. Определить длину окружности, вписанной в этот сегмент.

19. Из концов дуги ABC, содержащей 120°, проведены касательные до взаимного пересечения в точке D, и в полученную фигуру $ABCD$ вписана окружность. Доказать, что длина этой окружности равна длине дуги ABC.

20. На чертеже 32 даны вид и размеры в сантиметрах коленчатой трубы паровой машины. Найти её длину. (Её длина измеряется по средней пунктирной линии).

21. Найти радиус такой окружности, длина и площадь круга которой выражаются одним и тем же числом.

22. Определить относительную погрешность при замене длины полуокружности $\frac{1}{2}C$ через $a_3 + a_4$ (для приближённого спрямления окружности).

23. Одно из приближённых спрямлений окружности состоит в том, что её заменяют периметром прямоугольного треугольника, у которого один катет равен $\frac{6}{5}$ диаметра, другой катет составляет $\frac{3}{5}$ диаметра. Определить абсолютную погрешность.



24. Определить площадь круга при следующей длине радиуса: 1) 10 *м*; 2) 4 *дм*; 3) 2,6 *см* (взять $\pi \approx 3,14$).

25. Определить радиус круга, если его площадь равна: 1) 2 *см*²; 2) 50 *м*²; 3) 17 *дм*².

26. Лошадь привязана к колу верёвкой, длина которой равна 10,5 *м*. Найти площадь участка, на котором она может пастись (с точностью до 0,1 *м*²).

27. Найти площадь круга поршня воздушного насоса, диаметр которого равен 10 *см*.

28. Поршень насоса имеет площадь сечения в 12,56 *см*². Найти диаметр поршня.

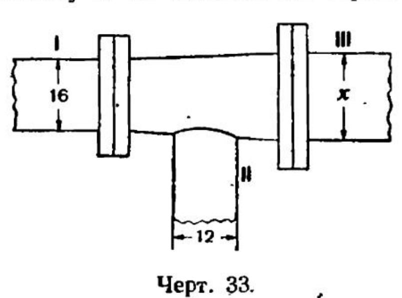
29. Дерево имеет 1,884 *м* в обхвате. Чему равна площадь его поперечного сечения, имеющего (приблизительно) форму круга?

30. Какой груз выдерживает пеньковый канат, имеющий 18 *см* в окружности, если допускаемая нагрузка равна 100 $\frac{кГ}{см^2}$?

31. 1) Определить площадь круга, если длина окружности равна 8 *см*.

2) Определить длину окружности, если площадь круга равна 18 *см*².

32. 1) Пропускная способность трубы III (черт. 33) та же, что и у труб I и II вместе. Определить построением величину x по данным на чертеже размерам.



Черт. 33.

2) Две трубы с диаметром в 6 *см* и в 8 *см* требуется заменить одной трубой той же пропускной способности. Найти диаметр этой трубы.

33. Определить площадь круга, если площадь вписанного квадрата равна F.

34. Вычислить площадь круга, если она меньше площади описанного квадрата на 4,3 $м^2$.

35. Найти отношение между площадями вписанного и описанного кругов: 1) для правильного треугольника; 2) для квадрата; 3) для правильного шестиугольника.

Площадь кольца.

36. Вертикальный цилиндрический котёл 78 *см* в диаметре и весящий 752 *кГ* имеет в днище круглое отверстие, наружный диаметр которого равен 36 *см*. Всей площадью своего днища котёл опирается на фундамент. Определить давление, оказываемое котлом вследствие его тяжести на 1 $см^2$ поверхности фундамента.

37. В кольце, образованном двумя концентрическими окружностями, хорда большей окружности, касающаяся меньшей, равна a. Определить площадь кольца.

38. Круга касаются шесть равных ему кругов, касающихся также между собой, и полученное соединение семи равных кругов охвачено таким концентрическим кольцом, которое равновелико их сумме. Доказать, что ширина кольца равна радиусу кругов.

Сектор и сегмент.

39. Определить площадь сектора, если радиус равен r, а дуга содержит: 1) 67°30′; 2) 15°45′.

40. Определить радиус сектора, если его площадь равна q, а центральный угол равен: 1) 72°; 2) 36′.

41. Радиус сектора равен r, а площадь равна q. Определить величину центрального угла (или дуги).

42. Определить площадь сегмента, если радиус равен R, а дуга содержит: 1) 90°; 2) 60°; 3) 45°; 4) 30°.

43. Определить площадь сегмента, если хорда равна a, а дуга содержит: 1) 120°; 2) 90°; 3) 60°.

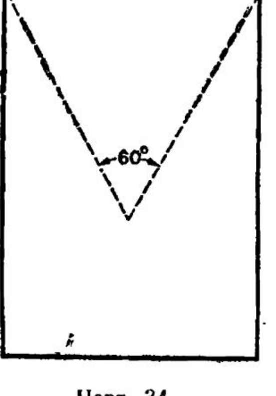
Площади фигур, ограниченных прямыми и дугами окружностей.

44. Определить площадь окна (черт. 34), имеющего форму прямоугольника, законченного вверху дугой круга в 60°; высота окна, считая от середины дуги до основания, равна 2,4 *м*, ширина его 1,6 *м*.

45. 1) Полуокружность радиуса r разделена на три равные части, и точки деления соединены с концом диаметра. Определить площадь средней части полукруга.

2) Концы дуги CD одинаково удалены от концов диаметра AB. Определить площадь, заключённую между дугой CD и хордами AC и AD, если площадь круга равна Q и дуга CD содержит n°.

46. В круге радиуса R проведены по одну сторону центра две параллельные хорды, из которых одна стягивает дугу в 120°, а другая в 60°. Определить часть площади круга, заключённую между хордами.



Черт. 34.

47. Общая хорда двух пересекающихся окружностей равна a и стягивает в одном круге дугу в 60°, а в другом — дугу в 90°. Определить площадь общей части кругов (два случая).

48. Площадь круга Q. Определить площадь вписанного в него прямоугольника, стороны которого относятся, как $m:n$.

49. В круг радиуса R вписан прямоугольник, площадь которого составляет половину площади круга. Определить стороны этого прямоугольника.

50. Около круга, площадь которого равна Q, описан ромб с углом в 30°. Определить площадь этого ромба.

51. Около правильного треугольника с площадью Q описана окружность, и в тот же треугольник вписана окружность. Определить площадь кольца, заключённого между этими окружностями.

52. AMB — дуга, содержащая 120°; OA и OB — радиусы; AC и BC — касательные; DME — дуга, описанная из центра C между CA и CB и касающаяся дуги AMB. Найти отношение между площадями секторов $CDME$ и $OAMB$.

53. Из концов дуги ACB проведены касательные до пересечения в точке D. Определить площадь $DACB$, заключённую между двумя касательными и дугой, если радиус равен R, а дуга содержит: 1) 90°; 2) 120°; 3) 60°.

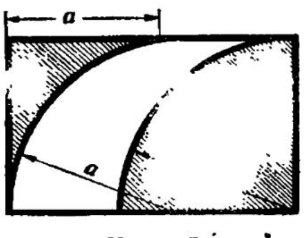
54. Из центра равностороннего треугольника описана окружность, пересекающая его стороны так, что внешние дуги содержат по 90°. Обозначая сторону этого треугольника через a, определить площадь, ограниченную внутренними дугами и средними отрезками сторон.

55. 1) Во сколько раз увеличится площадь круга, если диаметр его увеличить в 3 раза? Во сколько раз площадь уменьшится, если радиус уменьшить в 5 раз?

2) Во сколько раз надо уменьшить радиус круга, чтобы площадь уменьшилась в 4 раза? Во сколько раз надо увеличить диаметр круга, чтобы площадь увеличилась в 5 раз?

56. Можно ли водопроводную трубу диаметром в 50 *мм* заменить двумя трубами диаметром в 25 *мм* каждая? Одинакова ли площадь сечения одной большой трубы и двух малых?

57. Вычислить площадь заштрихованной части прямоугольника, данного на чертеже 35.



Черт. 35.

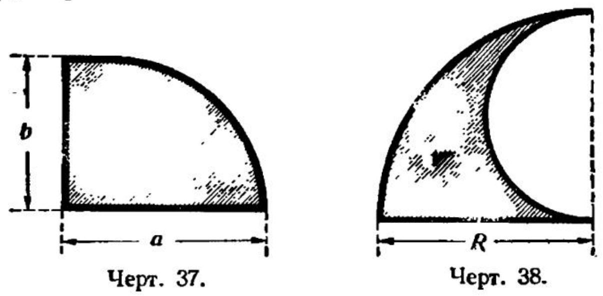


Черт. 36.

58. Определить площади фигур, заштрихованных на чертежах 36 — 39, по данным размерам.

59. Два равных полукруга наложены так, что диаметры их параллельны, а полуокружность одного проходит через центр другого. Определить площадь общей части полукругов по данному их радиусу R.

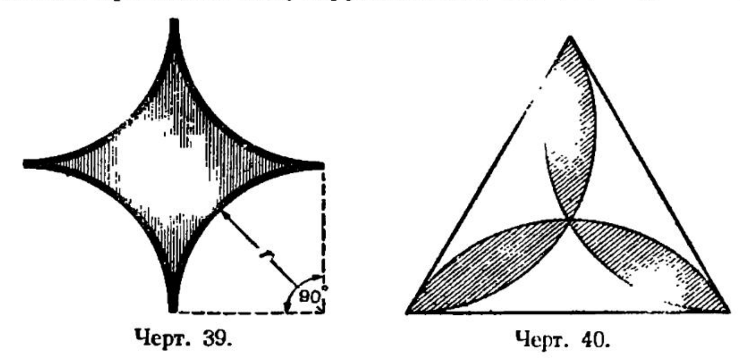
60. На каждой стороне квадрата, принятой за диаметр, описана полуокружность, лежащая внутри квадрата. Определить площадь полученной розетки, если сторона квадрата равна a.



Черт. 37. Черт. 38.

61. На сторонах ромба описаны, как на диаметрах, полуокружности, обращённые внутрь. Диагонали ромба равны a и b. Определить площадь полученной розетки.

62. Диаметр разделён на равные части, из обоих его концов проведены полуокружности во все точки деления,

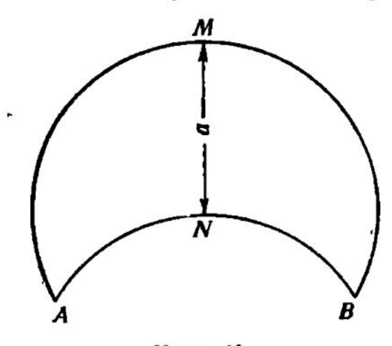


Черт. 39. Черт. 40.

причем из одного конца все полуокружности сверху, а из другого все снизу. Доказать, что полученными изогнутыми линиями круг разделился на части равной величины, а периметр каждой части равен длине окружности.

63. В равностороннем треугольнике проведены дуги между каждыми двумя вершинами через центр треугольника (черт. 40). Сторона треугольника равна a. Определить площадь полученной розетки.

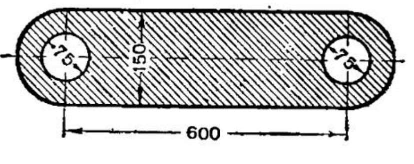
64. Между точками A и B проведены две дуги, обращённые выпуклостью в одну сторону: дуга AMB содержит 240° и дуга ANB 120°. Расстояние между серединами этих дуг равно a. Определить площадь луночки (черт. 41).



Черт. 41.

65. AB и CD — два взаимно перпендикулярных диаметра. Из точки D, как из центра, радиусом DA описана дуга AMB. Доказать, что луночка $AMBC$ равновелика треугольнику ABD.

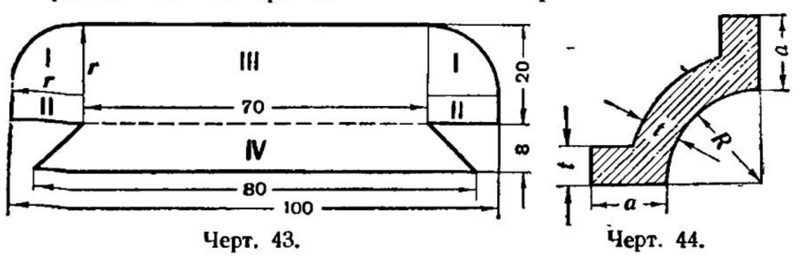
66. Из точки C данной полуокружности опущен перпендикуляр CD на диаметр AB, и на отрезках AD и DB построены новые полуокружности по одну сторону с данной. Доказать, что площадь, заключённая между тремя полуокружностями, равна площади круга с диаметром CD.



Черт. 42.

67. Вычислить площадь фигуры, заштрихованной на чертеже 42. Размеры даны в миллиметрах.

68. Вычислить площадь сечения, изображённого на чертеже 43. Размеры даны в миллиметрах.



Черт. 43. Черт. 44.

69. Определить площадь поперечного сечения фасонного железа, изображённого на чертеже 44.

70. Две параллельные хорды равны 14 *м* и 40 *м*, а расстояние между ними 39 *м*. Определить площадь круга.

71. Определить радиус круга, вписанного в данный сектор, если радиус сектора равен R, а дуга содержит α градусов [α равно: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°].

§ 9(16). Приложение алгебры к геометрии. Деление в среднем и крайнем отношении.

Построение формул.

1. 1) Построить отрезки, равные $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$.

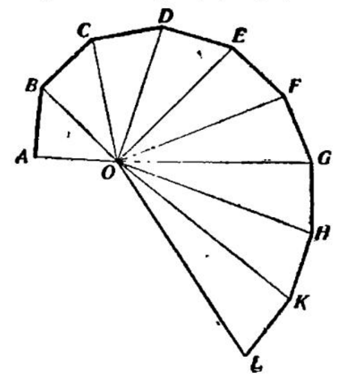
2) На чертеже 45 дано: $OA = AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HK = KL = 1$, причём $AB \perp AO$, $BC \perp BO$, $CD \perp CO$ и т. д. Вычислить: OB, OC, OD, OE, OF, OG, OH, OK, OL.

3) Построить отрезки, равные: $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $2\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\frac{3}{5}\sqrt{6}$.

2. Построить треугольник со сторонами: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$.

3. Указать измерения следующих выражений, в которых каждая буква, кроме π, обозначает длину отрезка:

1) $3{,}5a$; 2) $2\pi R$; 3) $R\sqrt{3}$; 4) $\frac{bh}{2}$; 5) abc; 6) $\pi r^2 h$; 7) $\frac{abc}{d}$; 8) $\frac{3a}{2b+c-4d}$; 9) $\sqrt{ab}$; 10) $0{,}5\pi D$; 11) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 12) $\sqrt[3]{a^2h}$; 13) $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; 14) $2\pi R^2 + 2\pi RH$; 15) $\frac{\pi D^2 H}{4}$;



Черт. 45.

16) $\frac{(a+b)h}{2}$; 17) $\frac{4}{3}\pi R^3$;

18) $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

4. Какие из следующих формул неоднородны:

1) $x = \frac{ab}{c} + \frac{b^2}{d} - 3a$; 2) $x = \sqrt{c-2}$; 3) $x^3 = \frac{a^3-b^3}{a+b}$;

4) $x = 2$; 5) $x = a + bc^2$; 6) $x = \frac{a}{b}$?

5. Построить треугольник со сторонами: $a = 2 + \sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 1$, $c = 2\sqrt{3}$.

6. Построить отрезки, выражаемые следующими формулами:

$$1)\ x = 3\frac{1}{2}a;\ 2)\ x = a - (b + 3d);\ 3)\ x = 3c - (2m - n);$$

$$4)\ x = \frac{2ab}{3c};\ 5)\ x = \frac{ab}{c + d};\ 6)\ x = \frac{a^2}{b};$$

$$7)\ x = \pi r;\quad 8)\ x = \frac{pqr}{st};\quad 9)\ x = \frac{ab}{c - d}.$$

7. Построить отрезки, выражаемые следующими формулами:

$$1)\ x = \sqrt{3ab};\ 2)\ x = \sqrt{\frac{a^2b}{c}};\ 3)\ x = \sqrt{a^2 \pm b^2};$$

$$4)\ x = \sqrt{4a^2 - b^2};\ 5)\ x = \sqrt{b^2 + 3c^2};\ 6)\ x = a\sqrt{\frac{a + c}{b + d}}.$$

Построение фигур.

8. Построить квадрат, равновеликий данному равностороннему треугольнику со стороной a.

9. Построить круг, площадь которого вдвое больше площади данного круга с радиусом R.

10. Данный круг с радиусом R разделить пополам концентрической окружностью.

11. Построить квадрат, равновеликий $\frac{3}{5}$ параллелограмма со стороной a и опущенной на неё высотой h.

12. Построить круг, равновеликий кольцу между двумя концентрическими окружностями с радиусами R и r.

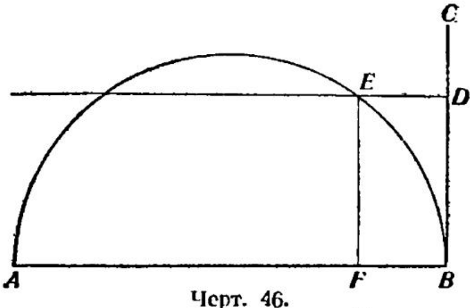
13. По данному основанию a и прилежащему к нему углу в 30° построить треугольник, равновеликий данному треугольнику с основанием b и высотой h.

Построение корней квадратного уравнения.

14. Построить корни квадратных уравнений $x^2 \pm px \pm q^2 = 0$.

15. 1) На AB, как на диаметре (черт. 46), описана полуокружность. Дано: $AB = p$; $BC \perp AB$; $BD = q$; $DE \parallel AB$; $EF \perp AB$. Доказать, что отрезки AF и FB служат корнями квадратного уравнения $x^2 - px + q^2 = 0$.

2) Применить рассмотренное построение к построению корней уравнения: $x^2 - 6,5x + 4 = 0$, не решая уравнения.



Черт. 46.

3) Почему применение этого способа к уравнению $x^2 - 2,5x + 9 = 0$ не даёт желаемых результатов?

Деление в среднем и крайнем отношении.

16. Разделить данный отрезок a в среднем и крайнем отношении, т. е. разделить его на две части так, чтобы бóльшая часть была средней пропорциональной между всем отрезком и его меньшей частью.

17. 1) Доказать, что сторона правильного вписанного десятиугольника равна большему отрезку радиуса, разделённого в среднем и крайнем отношении.

2) По данному R вычислить a_{10}.

18. Если какой-нибудь отрезок разделён в среднем и крайнем отношении, то бóльшая часть составляет приблизительно $\frac{5}{8}$ всего отрезка. Проверить это и определить степень точности такого приближения.

19. 1) Определить бóльшую часть при делении отрезка в среднем и крайнем отношении, если меньшая часть равна b.

2) Если меньшую часть отрезка, разделённого в среднем и крайнем отношении, отложить на бóльшей части, то бóльшая часть также разделится в среднем и крайнем отношении. Доказать.

20. Диаметр разделён в среднем и крайнем отношении перпендикуляром, проведённым из точки окружности. Радиус окружности равен r. Найти длину перпендикуляра.

21. Доказать, что в правильном пятиугольнике две пересекающиеся диагонали взаимно делятся в среднем и крайнем отношении.

22. Если радиус круга разделить в среднем и крайнем отношении и, взяв бо́льшую часть, описать ею концентрическую окружность, то площадь данного круга также разделится в среднем и крайнем отношении, причём большей частью будет кольцо. Доказать это.

Применение алгебраического метода.

23. На продолжении диаметра круга радиуса r найти такую точку, чтобы касательная, проведённая из неё к данному кругу, равнялась диаметру.

24. В данную полуокружность вписать квадрат.

25. Дан треугольник с основанием a и высотой h. Вписать в него прямоугольник, имеющий данный периметр $2p$.

26. Данный треугольник разделить пополам прямой, параллельной его основанию.

27. Площадь треугольника разделить пополам прямой, перпендикулярной к основанию.

28. Вписать в данный ромб прямоугольник, стороны которого были бы параллельны диагоналям ромба и площадь которого равнялась бы $\frac{1}{3}$ площади ромба.

29. В данный квадрат вписать равносторонний треугольник так, чтобы одна из вершин у них была общая.

30. В квадрат со стороной a вписать другой квадрат со стороной b.

31. Построить окружность, касающуюся данной окружности радиуса r и данной прямой в данной на ней точке.

32. Даны два прямоугольника. Построить третий прямоугольник, изопериметричный с одним из данных прямоугольников и равновеликий другому.

33. В данный треугольник вписать прямоугольник, основание которого относилось бы к высоте, как $m:n$.

34. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB=a$ и $BC=b$. Провести прямую EF так, чтобы она отсекла параллелограмм $ABEF$, подобный $ABCD$.

35. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB=a$ и $BC=b$. Провести прямую EF, параллельную AB, так, чтобы она разделила данный параллелограмм на два подобных между собой параллелограмма.

36. В углы A и C прямоугольника $ABCD$ вписать две равные окружности, которые касались бы между собой.

37. Через точки A и B провести окружность, отсекающую от данной прямой хорду данной длины m.

ОТВЕТЫ.

§ 1(8).

1. 1) $AD = 8$ *м* и $DC = 12$ *м*; 2) 10 *м*; 3) 1,8 *м*. 2. 10 *см*. 3. 1) Да; 2) нет; 3) нет; 4) да. 4. $BE = 7$ *см*; $EC = 5$ *см*. 5. 39 *см* и 65 *см*. 6. 8 *см*. 7. 50 *см*. 8. 16 *см*, 20 *см*, 20 *см*. 9. $BE = 10$ *м*, $EC = 14$ *м*. 10. $\frac{b}{a+c}$. 11. 6 *см*, 4 *см* и 6 *см*. 12. $\frac{ab}{a+b}$.

§ 2(9).

1. 1 *м*, 1,2 *м*. 2. 10 *м*, 25 *м*, 20 *м*. 3. 42,0 *м* (с точностью до 0,1). 4. 1) $b_1 = 35$, $c = 8$; 2) $c = 20$. 5. $AC = 24$ *см*, $EF = 18$ *см*; $DF = 15$ *см*. 6. 13,6 *см*. 7. $AC = 3$ *м*; $A_1C_1 = 1{,}2$ *м*. 8. $AC = 20$ *см*; $EF = 15$ *см*. 9. 1) Да; 2) да; 3) нет. 10. 1) Нет; 2) да. 11. 2,6 *м*. 12. 1) 1 *м*, 2 *м* и 2,5 *м*; 2) 6,5 *м* и 5,5 *м*. 13. 1,25 *м*. 14. 1) 14 *см*; 2) 6 *дм*. 15. 1) 4 *см*; 2) 27 : 28. 16. 2 *м*. 17. $\frac{bc}{a+c}$. 18. $BC = 12$ *см*; $BD : BA = 3 : 4$. 19. $AD = 1$ *м*, $DC = 3$ *м*. 20. *Указание*. Каждая сторона искомого треугольника есть четвёртая пропорциональная к трём отрезкам: периметру искомого треугольника, периметру данного треугольника и одной из сторон данного треугольника. 22. *Указание*. По углу и отношению отрезков основания построить треугольник, подобный искомому. 23. $OB = 15$ *см*, $OD = 12$ *см*. 24. $AO : OC = 20 : 9$, $AD = 40$ *см*, $BC = 18$ *см*. 25. $AB = 30$ *см*, $AD = 40$ *см*. 26. 18 *см*. 27. 20 *см*. 28. 300 *м*. 29. $\frac{a(m-n)}{n}$. 30. $\frac{bc}{a+2c}$. 31. 10 *см* и 12 *см*. 32. $\frac{bc}{b+c}$. 33. $\sqrt{pq}$. 34. *Указание*. Найти направление прямых, соединяющих середину хорды с вершинами квадрата. 35. *Указание*. Найти направление прямой, соединяющей одну из вершин треугольника с одной из вершин квадрата. 36. $\frac{ah}{a+h}$. 37. *Указание*. Найти направление прямой, соединяющей одну из вершин треугольника с одной из вершин прямоугольника. Задача имеет, вообще говоря, 6 решений. 38. 10 *см* и 18 *см*. 39. 12 *см*. 40. $\frac{ah}{a+2h}$. 41. $CD = 3$ *см*, $BD = 9$ *см*. 42. $AD = 6$ *м*, $BE = 8$ *м*. 43. 1 *м*. 44. 14 *см* и 10 *см*. 45. $\sqrt{2ar}$. 46. 10 *см* и 26 *см*. 47. $\frac{ab}{a+b}$. 48. 16 *см*. 49. $\frac{lm}{l+m}$. 50. 68 *дм* и 80 *дм*. 51. 20 *м*. 52. $OE = 6$ *дм*; $OD = 8$ *дм*. 53. 42 *дм*.

54. $\frac{ar}{a+2r}$. 55. 30 *см*, 24 *см*, 18 *см*, 36 *см*. 56. 18 *м*, 9 *м*, 12 *м*, 36 *м*. 57. 8 *дм*, 12 *дм*, 16 *дм*, 20 *дм*. 58. 100 *м* и 40 *м*. 59. $a:b = \sqrt{2} \approx 1,414$. 60. $\frac{a^2}{b}$.

§ 3(10).

1. 1) 37 *см*; 2) 65 *см*; 3) 41 *дм*; 4) 109 *см*; 5) $21\frac{1}{4}$; 6) $1\frac{9}{16}$; 7) 17; 8) $\sqrt{61} \approx 7,81$. 2. 1) 161; 2) 260; 3) 24; 4) 42; 5) $7\frac{1}{5}$; 6) $\sqrt{51} \approx 7,14$.

3.

	a	b	c	a_c	b_c	h
1)	(15)	(20)	25	9	16	12
2)	(24)	(7)	25	$23\frac{1}{25}$	$1\frac{24}{25}$	$6\frac{18}{25}$
3)	(4)	(5)	$\sqrt{41}$	$\frac{16}{41}\sqrt{41}$	$\frac{25}{41}\sqrt{41}$	$\frac{20}{41}\sqrt{41}$
4)	(100)	75	(125)	80	45	60
5)	156	(65)	(169)	144	25	60
6)	(600)	175	(625)	576	49	168
7)	(6)	8	10	(3,6)	6,4	4,8
8)	24	(7)	25	23,04	(1,96)	6,72
9)	21	20	(29)	$\left(15\frac{6}{29}\right)$	$13\frac{23}{29}$	$14\frac{14}{29}$
10)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	(3)	1	(2)	$\sqrt{2}$
11)	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{6}$	$\left(1\frac{1}{2}\right)$	$\left(2\frac{2}{3}\right)$	2
12)	$2\sqrt{10}$	$6\sqrt{10}$	20	(2)	(18)	6
13)	(136)	255	289	64	225	(120)
14)	40	(9)	41	$39\frac{1}{41}$	$1\frac{40}{41}$	$\left(8\frac{32}{41}\right)$

4. *Указание.* Воспользоваться § 47 (190) из Киселёва. 5. *Указание.* Если разность отрезков $x - y = r$, а среднее пропорциональное $\sqrt{xy} = p$, то сумму отрезков можно найти как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами r и $2p$. 7. 50 *см* и 72 *см*. 8. 5,2 *м*. 9. 18 *см*, 98 *см*. 12. Воспользоваться задачей № 11. 13. 3, 4, 5. 14. $\sqrt{116} \approx 10,8$ *м*. 15. 1) $\sqrt{a^2+b^2}$; 2) 109 *см*. 16. $32\sqrt{2} \approx 45$ *мм*. 17. 1) $a\sqrt{2}$; 2) $2(\sqrt{2}+1)$ *см*. 18. Нет. 19. 1) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$; 2) 32 *см* и 60 *см*. 20. 1) 41 *см*; 2) 10 *см*. 21. 1) 15 *см*; 2) 125 *см*, 125 *см*, 240 *см*; 3) $2\sqrt{2}$ *см*. 22. $BD \approx 5$ *м*. 23. 1) 3 *м* и 4 *м*; 2) 9 *см*, $1\frac{5}{7}$ *см*, $14\frac{2}{7}$ *см*. 24. 1) $\frac{a}{2}\sqrt{3}$;

2) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}$; 3) $2m(2+\sqrt{3})$; 4) $2\sqrt{3}$ и $4\sqrt{3}$ *см.* **25.** 1) 25 *см* или 11 *см*; 2) 29 *см*; 3) 40 *см.* **26.** 1) 37 *см*; 2) 3 *дм* и 4 *дм.* **27.** 1) 24 *см*; 2) 36 *см* и 54 *см.* **28.** Около 5630 *м.* **29.** 1) $D \approx 25$ *мм*; 2) $d \approx 19$ *мм*; 3) $h \approx$ ≈ 11 *мм*; $D = d + \frac{2}{3}h\sqrt{3}$. **31.** 2) $\sqrt{a^2+3b^2}$. **32.** 24 *мм.* **33.** 1) 39 *дм*; 2) 80 *см*; 3) 14 *см* или 4 *см*; 4) 21 *см*; 5) 6 *см.* **34.** 1) $D = 425$ *мм*; 2) $D = \frac{l^2+4s^2}{4s}$. **35.** $\frac{a^2+4h^2}{8h}$. **36.** 9 *см* или 39 *см.* **37.** 42,5 *см.* **38.** 1) 77 *см*; 2) 61 *см*; 3) 13,44 *см.* **39.** $y = \sqrt{2Rr}$. **40.** 1) 40 *см*; 2) внешняя касательная равна 48 *см*; внутренняя касательная равна 30 *см.* **41.** 13 *м.* **42.** 73 *см.* **43.** 7 *м* и 25 *м.* **44.** $7\frac{9}{17}$ *см.* **45.** 175 *см* и 600 *см.* **46.** 20 *см.* **47.** 1 : 4. **48.** 49 : 81. **49.** 21 *см* и 28 *см.* **50.** $a(\sqrt{2}-1)$ и $a(2-\sqrt{2})$. **51.** $n\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$ и $m\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$. **52.** 1 *м.* **53.** 15 *см.* **54.** 5 *м.* **55.** 1) 10 *см*; 2) 7,5 *см.* **56.** 18 *дм.* **57.** 1) 24 *дм*; 2) $2{,}4\sqrt{5}$ *дм*; $1{,}8\sqrt{5}$ *дм*; 3) 13,44 *дм.* **58.** 1) $9\frac{1}{15}$ *см*; 2) $0{,}8r\sqrt{5}$. **59.** 15 *дм.* **60.** 65 *дм.* **61.** 35 *дм.* *Указание.* Провести среднюю линию и высоту из вершины тупого угла. **62.** $AE : EC = 16 : 25$. **63.** 36 *дм*, 48 *дм.* **64.** 18 *дм* и 80 *дм.* **65.** 1) 37 *м* и $\sqrt{769} \approx 27{,}7$ *м*; 2) 4 : 5. **66.** 1) 3,125 *дм*; 2) 16,9 *м.* **67.** 6 *дм.* *Указание.* Отрезки гипотенузы, образуемые точкой касания, равны прилежащим к ним отрезкам катетов. **68.** 38 *дм* и 22 *дм.* **69.** 25 *дм.* *Указание.* Ввести вспомогательное неизвестное — расстояние от центра до одной из хорд. **70.** 30 *см.* **71.** 32 *см* и 18 *см.* **72.** Основания: $\frac{2mr}{\sqrt{mn}}$ и $\frac{2nr}{\sqrt{mn}}$; боковая сторона $\frac{(m+n)r}{\sqrt{mn}}$. **73.** 20 *дм.* **74.** 1 *дм.* **75.** $CA =$ $= \frac{m^2+n^2}{m} = 39$; $CB = \frac{m^2+n^2}{n} = 26$. *Указание.* Соединить концы отрезков m и n с основанием перпендикуляра. **76.** 27 *дм* и 64 *дм.* **77.** *Указание.* Выразить длину общей внешней касательной через радиусы. **78.** $AB =$ $= \sqrt{a(a+b)}$; $CD = \sqrt{b(a+b)}$. **79.** $AC \approx 44$ *м.* **80.** $c \approx 20$ *м.* **81.** 1) 7; 2) $\sqrt{7}$; 3) 16; 4) $2\sqrt{3}$. **82.** 1) Тупоугольный; 2) прямоугольный; 3) остроугольный; 4) остроугольный; 5) тупоугольный. **83.** 1) $p = 5$, $q = 9$, $h = 12$; 2) $p = 35$, $q = 5$, $h = 12$; 3) $p = 20$, $q = 8$, $h = 15$; 4) $p = 1\frac{3}{8}$, $q = 2\frac{5}{8}$, $h = \frac{3}{8}\sqrt{15}$. **84.** 1) 7 *см*; 2) 13 *см*; 3) 73 *см.* **85.** 1) 7 *см*; 2) 13 *см*; 3) 31 *см.* **86.** 1) $\sqrt{13-6\sqrt{2}} \approx 2{,}125$; 2) $\sqrt{13} \approx 3{,}6$; 3) 5. **87.** 13; 14; 15. **88.** 9 *см* и 24 *см.* **89.** 10 *м* или 6 *м.* **90.** Боковые стороны 7 *см* и 15 *см*, высота $\frac{105\sqrt{3}}{26} \approx 7{,}0$ *см.* **91.** 20 *см.* **92.** $AC = a$, $AD = a(\sqrt{2}+1) \approx 2{,}4a$; $CD = a\sqrt{2+\sqrt{2}} \approx 1{,}8a$. **93.** $x =$

$=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-a^2}}=30$. **94.** 1) 13 *см*; 2) 11,2 *см*. **95.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{4}$. **96.** 13. **97.** 12 *см* и 8 *см*. **98.** 14 *см* и 16,8 *см*. **99.** 25; 56. **100.** 52. *Указание.* Провести высоту треугольника ABC и воспользоваться подобием треугольников. **101.** $\sqrt{R^2+3r^2}$. **102.** 1) 20 *см* и 30 *см*; 2) 10 *см* и 15 *см*. **103.** 1) 7 *см* и 11 *см*; 2) стороны 4 *см* и 7 *см*; диагонали 7 *см* и 9 *см*. **104.** 1) 11; 2) 14; 3) $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$; $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}$; $m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$. **105.** 24 *см*. **106.** 1) 7 *см*; 2) 6 *см*. **107.** 1) 12; 20; $\sqrt{544}\approx 23$; 2) 15; 17; 39; 3) 2,4; $\sqrt{23{,}4}$; $\sqrt{13{,}6}$. **108.** 15 *см* и 25 *см*. **111.** *Указание*. Середины сторон четырёхугольника соединить ещё последовательно. **112.** 30°.

§ 4(11).

1. $AB\approx 13$ *м*. **2.** $\sqrt{3}\approx 1{,}7$ *м*. **3.** 1) 6 *см*, 12 *см*, 1 *м*; 2) 16 *см*. **4.** 1) Внутри круга; 2) на окружности; 3) вне круга. **5.** 1) 4; 2) 65; 3) $\frac{r}{5}$; 4) 5 или 45. **6.** 1) 30 *см*; 2) 40 *см*; 3) 21 *дм* и 29 *дм*. **10.** 1) 1 *м*; 2) 6 *см*; 3) 10 *м*. **11.** 1) 8 *см*; 2) 18 *м*; 3) 14 *см*. **12.** 1) 7 *см*; 2) $r(\sqrt{5}-1)\approx\approx 1{,}24r$. **13.** 12 *см*. **14.** $R=4{,}35$ *м*. **15.** Нет. **16.** $\approx 43{,}6$ *см*. **17.** $R\approx\approx 592$ *м*. **18.** Уменьшился в $2\frac{1}{2}$ раза. **19.** 1) 24 *см*; 2) 33 *м*. **20.** 24 *см* и 8 *см*. **21.** Увеличилась в 3 раза. **22.** 1) 4 *см*; 2) 20 *м*; 3) $AB=35$ *м* и $AC=15$ *м*. **23.** 8 *см*. **24.** 1) 9 *дм*; 2) 36 *см*; 3) 25. **25.** mx и nx, где $x=\frac{am-bn}{n^2-m^2}$. **26.** 1) 6; 2) 3; 3) $\sqrt{3}$. **27.** 21 *см*. **28.** В $1\frac{1}{2}$ раза. **30.** Вторая точка пересечения. **31.** 1) 3 *см*; 2) 18 *см*; 3) $\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$. **32.** 1) 226 *км*; 2) 270 *км*. **33.** 1) 17 *см*; 2) 13 *см*. **34.** 1) 10 *см*; 2) $\frac{a}{2}$. **35.** 18 *см*. **36.** 12 *см* и 36 *см*. **37.** 1) 18 *см* и 12 *см*; 2) 9 *см* и 6 *см* или $12\frac{1}{2}$ *см* и $2\frac{1}{2}$ *см*. **40.** 6 *дм*. **41.** $\frac{2}{5}r$. **42.** 1) 10 *см*; 2) 8 *дм*; 3) 9,375 *м*. **43.** 25 *дм*, 8 *дм*, 15 *дм*. **44.** $\frac{a}{r}\sqrt{4r^2-a^2}$. **45.** 9 *дм*. **46.** $\sqrt{2ar}$.

§ 5(12).

1. 1) 15°, 22°,5; 2) 12-угольник, 30-угольник. **3.** 60°, 90°, 108°, 120°, 135°, 144°, 150°, 165° 36′. **4.** 1) 8-угольник, 12-угольник; 2) 10-угольник, 15-угольник. **5.** $2\sqrt{2}\approx 2{,}8$ *см*. **6.** $\sqrt{3}\approx 1{,}7$ *см*. **7.** 4,4 *см*. **10.** 2) $2m\sqrt{3}$. **11.** 1) $r=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$; 2) $R=\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}$; 3) $a=2\sqrt{R^2-r^2}$. **12.** 2 *см*, 4 *см*, $2\sqrt{3}$ *см*, 0. **15.** 1) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 3) a; 4) $\frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$;

5) $a\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **16.** 1) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **17.** 1) $2k$; 2) $k\sqrt{2}$; 3) $\frac{2k\sqrt{3}}{3}$; 4) $k\sqrt{4-2\sqrt{2}}$. **18.** 1) $2R\sqrt{3}$; 2) $2R$; 3) $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. **19.** $b_n = \frac{a_nR}{\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}}$. **21.** 1) $R\sqrt{2}$, $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $2R$; 2) $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a(\sqrt{2}+1)$, $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. **22.** 1) R, $R\sqrt{2}$, $R\sqrt{3}$, $R\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $2R$; 2) $a\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $a\sqrt{4+2\sqrt{3}} = a(\sqrt{3}+1)$, $a\sqrt{3(2+\sqrt{3})}$, $a(2+\sqrt{3})$, $2a\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **23.** *Указание.* Сторона искомого пятиугольника равна большей части диагонали, разделённой в среднем и крайнем отношении. **24.** $BD = 4{,}2$ *м*, $a_8 = 2{,}3$ *м*, $H = 2{,}1$ *м*. **25.** $a_n : b_n = r : R$, $a_3 : b_3 = \frac{1}{2}$, $a_6 : b_6 \approx 0{,}866$. **26.** 1) $\frac{R\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866R$; 2) $\frac{R\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707R$. **27.** 1) $\frac{a}{2}(2+\sqrt{2})$; 2) $\frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$. **29.** $\frac{a}{3}$. **31.** $\frac{b\sqrt{3}}{3}$, $\frac{b\sqrt{6}}{3}$. **32.** $2\sqrt{6} \approx 4{,}9$ *дм*. **33.** 1) $\frac{R\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7R$; 2) $\frac{a\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}82a$. **34.** 1) $\frac{a}{6}(3 \pm \sqrt{3})$; 2) a. **36.** $\frac{a}{6}$. **37.** *Указание.* Через центр данного квадрата провести диагонали искомого квадрата, каждая из которых найдётся как гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника с катетами, равными данной стороне. **38.** *Указание.* Диагонали квадрата делят углы между диагоналями ромба пополам. **39.** $8a(2-\sqrt{2})$. **41.** 1) $\frac{R\sqrt{3}}{3}$; 2) $R(\sqrt{2}-1)$. **42.** 1) $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$; 2) $R\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **43.** $1 : \sqrt{3} : 2 \approx 1 : 1{,}7 : 2$. **44.** $c(\sqrt{3}+1)$. **45.** $\frac{3}{5}h$. **46.** В случае внешнего касания: 1) $R(2\sqrt{3}+3)$; 2) $R(\sqrt{2}+1)$; 3) R. В случае внутреннего касания: 1) $R(2\sqrt{3}-3)$; 2) $R(\sqrt{2}-1)$; 3) $\frac{R}{3}$.

§ 6(13).

1. 2,25 *м*². **2.** 23 *Т*. **3.** $\sqrt{32\,500} \approx 180$ *м*. **4.** 1) $\frac{l^2}{2}$; 2) $2R^2$; 3) в два раза. **5.** 1) Увеличится в 9 раз; уменьшится в 2,25 раза; 2) увеличить в два раза; уменьшить в 5 раз. **6.** 552,25 *га*. **7.** $48\frac{кГ}{дм^2}$. **8.** 21,9 *а*. **9.** 17 *км*. **10.** 1) 8 *м*, 18 *м*; 2) 12 *дм* и 25 *дм*. **11.** 24 *м*. **12.** 8,16 *см*². **13.** 130 *см*². **14.** 818 *см*. **15.** 7,54 *а*. **16.** 30 *см*. **17.** $\frac{ph_1h_2}{h_1+h_2}$. **18.** 1) $\frac{ab}{2}$; 2) $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{ab\sqrt{3}}{2}$. **19.** 30°. **21.** 202,8 *см*². **22.** 1400 *см*². **25.** mn.

26. 1 : 3. 27. mn. 28. 7 *см* и 9 *см* или 21 *см* и 3 *см*. 29. ≈ 121 *кГ*. 30. 1) 288 *см*^{2}; 2) 1 *м*^{2}; 3) 5 кв. единиц. 31. *Указание*. Высоты данного и искомого треугольников равны. 33. 1) $\frac{ab}{4}$; 2) $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{ab\sqrt{3}}{4}$. 34. 1) Да; 2) нет; 3) да. 35. 1) 39 *дм*^{2}; 2) 82 *см*; 3) $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 36. $\frac{c^2}{4}$. 37. 1) 2688 *см*^{2}; 2) $\frac{b}{4}\sqrt{4c^2-b^2}$; 3) $10\sqrt{21} \approx 46$ *см*^{2}. 38. *Указание*. Соединяем данную точку K с точкой D — серединой стороны AC, проводим $BE \parallel DK$. Прямая KE будет искомая. 39. 1) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt{3Q\sqrt{3}}$; 3) $\frac{1}{3}h^2\sqrt{3}$. 40. 1) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$; 2) $3r^2\sqrt{3}$. 41. 6 *дм*^{2}. 42. 2250 *см*^{2} или 522 *см*^{2}. 43. 55 *см*, 48 *см*. 44. 12 *см* или 16 *см*. 45. 1) 1440 *см*^{2}; 2) 9,6 *м*. 46. $\sqrt{Q\frac{m^2+n^2}{2mn}}$. 51. 12,8 *м*^{2}. 52. $\frac{a^2}{4}(\sqrt{3}-1) \approx 0{,}183a^2$. 53. 75 *см*^{2}. 54. $a^2(3+\sqrt{3}) \approx 4{,}73\,a^2$. 55. $2a^2(\sqrt{2}-1) \approx 0{,}8\,a^2$. 56. 8,4 *м*^{2}. 57. 6912 *см*^{2}. 58. 52 *см*^{2}. 59. 1) 84; 2) 60; 3) $10\sqrt{2} \approx 14{,}1$; 4) $\frac{15}{4}\sqrt{3} \approx 6{,}49$; 5) 5,28; 6) $17\frac{1}{3}$; 7) 8; 8) $18\frac{1}{2}$; 9) $3\frac{1}{2}$. 60. 1) 2 *м*; 2) 112. 61. 1) 130 *дм*, 125 *дм*, 15 *дм*; 2) 18 *см*, 20 *см*, 34 *см*. 62. 144 *см*^{2}. 63. 30 *см*. 64. 1224 *см*^{2}. 65. 270 *см*^{2}. 66. 1) 25 или 39; 2) 14 или 12. 67. 36 кв. единиц. 68. 6 *см*. 69. 14 *м*, 30 *м*, 40 *м*. 70. 546 *см*^{2}; $\sqrt{1621} \approx 40$ *см*. *Указание*. Для определения BD проводим $BE \perp AC$, $DF \perp AC$ и $DG \parallel AC$ до пересечения с продолжением BE. 71. 1) 8 *см*; 2) 25 *см*; 3) 8 *см* и 10 *см*. 72. $\approx 1{,}9$ *м*^{2}. 73. 13,25 *м*^{2}. 74. 1100 *м*^{2}. 75. 11583 *см*^{2} $\approx 1{,}2$ *м*^{2}. 76. 1) 10 *см*; 2) 2 : 3. 77. 24 *дм*^{2}. 78. 288 *см*^{2}. 79. $\frac{mn}{6}$. 80. 480 *см*^{2}. 81. 540 *м*^{2}. 82. 1) 256 *см*^{2}; 2) h^2. 83. $\frac{c^2}{2}$. 84. 216 *см*^{2}. 85. 8316 *см*^{2}. *Указание*. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, причём $BC \parallel AD$. Проводим $CE \parallel BD$, где E — точка на продолжении AD, и трапецию заменяем треугольником ACE. 86. $\frac{R^2}{2}$. 87. $\frac{a^2}{2}$. 88. 1) 1764 *см*^{2}; 2) 150 *м*^{2}. 89. 48 *см*. 90. $\frac{1}{2}[d_1h_1 + d_2(h_2+h_3)] \approx$ $\approx 12{,}0$ *га*. 91. $\approx 34a$. 92. 1) $\frac{1}{2}kl$; 2) $\frac{1}{4}kl$. 93. $\frac{1}{2}(a+b\sqrt{3}) \times$ $\times (b+a\sqrt{3})$. 94. $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+ab+b^2)$. 95. 426 *см*^{2}. *Указание*. Провести $BE \perp AD$ и $CF \perp AD$. 96. $\frac{3r^2}{4}(\sqrt{3}+1)$. 97. 1) 8 *см*; 2) 16 *дм*. 98. $3r^2\sqrt{3}$. 99. $84\sqrt{6}$. 100. 650. 101. 28,5 *м*^{2}. 102. 1) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $2r^2\sqrt{3}$;

3) $\frac{1}{3}\sqrt{2S\sqrt{3}}$. **103.** $2R^2\sqrt{2}$; $3R^2$. **104.** ≈ 355 *см*^{2}. **105.** $\approx 10{,}7$ *см*^{2} **106.** 1) $\frac{Q\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{Q\sqrt{2}}{2}$. **107.** 1) $R^2\sqrt{3}$; 2) $4R^2(2-\sqrt{2})$. **114.** 3:2. **116.** $2(a^2+ab+b^2)$. **117.** $P:Q=2:3$. **118.** пл. ABC : пл. $DBE = 1:2$. **120.** 16; 25. **121.** $5\sqrt{2}\approx 7{,}07$ *дм*. **122.** $\frac{1}{4}$. **123.** $h\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}7h$. **124.** 1) 4:21:56; 2) $m^2:(2m+n)n$. **125.** 256 *см*^{2}. **126.** 3:5:7. **127.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3}{4}$. **128.** 32 *дм*^{2}, 72 *дм*^{2}, 128 *дм*^{2}. **134.** $\sqrt{2}$. **135.** $10\sqrt{2}\approx$ $\approx 14{,}14$ (*м*). **136.** 300 *дм*^{2}. **138.** 25 *дм*^{2}. **139.** 60 *см*^{2} и 40 *см*^{2}. **140.** 1:3. **141.** $\sqrt{3}+1\approx 2{,}732$; $2(2+\sqrt{3})\approx 7{,}464$. **143.** $\frac{2mn}{(m+n)^2}$.

§ 7(14).

2. 1) 12 *дм*; 2) $m_a=\sqrt{11{,}5}\approx 3{,}4$; $m_b=\sqrt{7{,}75}\approx 2{,}8$; $m_c=\sqrt{2{,}5}\approx$ $\approx 1{,}6$. **3.** 30. **4.** 15 *дм* и 25 *дм*. **5.** 144. **6.** 16,5. **7.** 1) *Указание*. Сначала построить тр-к AMB со сторонами c, $\frac{2}{3}m_a$ и $\frac{2}{3}m_b$; 2) 72. **8.** 1) *Указание*. Построить тр-к AMK со сторонами $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$ и $\frac{2}{3}m_c$, а затем найти основание AC искомого тр-ка ABC; 2) 72. **10.** 6; 10; 24. **11.** 4. **12.** 12 и 27. **13.** 29 *см* и 12 *см*. **14.** 1) Вне треугольника; 2) внутри треугольника; 3) на середине гипотенузы. **17.** 1) $R=8\frac{1}{8}$, $r=4$; 2) $R=8\frac{1}{8}$, $r=1{,}5$; 3) $R=24\frac{1}{6}$, $r=2\frac{1}{3}$; 4) $R=\frac{35}{\sqrt{96}}\approx 3{,}6$, $r=\frac{\sqrt{6}}{2}\approx 1{,}2$. **18.** 4,5. **19.** 1) R; 2) $R\sqrt{2}$. **20.** *Указание*. Выразить все высоты через площадь и стороны. **21.** $\frac{R^2}{4}(3+\sqrt{3})$. **22.** 40 *см* и 42 *см*. **23.** 1) R^2; 2) $R^2\sqrt{2}$; 3) $R^2\sqrt{3}$; 4) $2R^2$.

§ 8(15).

1. 1) $\approx 62{,}8$ *м*; 2) $\approx 94{,}2$ *м*; 3) ≈ 220 *см*. **2.** 1) ≈ 16 *см*; 2) $\approx 4{,}0$ *см*; 3) $\approx 0{,}76$ *дм*. **3.** 60. **4.** $\approx 5{,}9\,\frac{м}{сек}$. **5.** 1) $\frac{\pi R}{4}$; 2) $\frac{49\pi R}{360}$; 3) $\frac{419\pi R}{14400}$. **6.** 1) $\frac{4l}{3\pi}$; 2) $\frac{135l}{8\pi}$. **7.** 133°20′. **8.** $\approx 21°{,}5$. **9.** 1) 144°; 2) $1\frac{1}{3}$ *см*; 3) 7,2 *см*. **10.** $x=\frac{180°l}{\pi R}$; 1) $\frac{810°}{\pi}$; 2) $\frac{72°}{\pi}$. **11.** $\approx 57°18'$. **12.** 1) $\frac{\pi a}{3}\approx 1{,}05\,a$;

2) $\frac{\pi a\sqrt{2}}{4} \approx 1{,}11a$; 3) $\frac{2\pi a\sqrt{3}}{9} \approx 1{,}21a$. **13.** 1) $\frac{3l}{\pi} \approx 0{,}95l$; 2) $\frac{2l\sqrt{2}}{\pi} \approx$ $\approx 0{,}90l$; 3) $\frac{3l\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0{,}83l$. **14.** 25 *см*. **15.** 1) $2\pi m$; 2) зазор и для земного шара и для мяча один и тот же и равен $\frac{1}{2\pi} \approx 0{,}16$ *м*. **16.** 1) $\approx$ ≈ 182 *мм*; 2) $\approx 8{,}0$ *см*. **17.** ≈ 157 *см*. **18.** $\frac{3}{4}l$. **20.** ≈ 119 *см*. **21.** 2. **22.** $\approx 0{,}15\%$. **23.** $\approx 0{,}00005D$. **24.** 1) ≈ 314 *м*²; 2) $\approx 50{,}2$ *дм*²; 3) $\approx 21{,}2$ *см*². **25.** 1) $\approx 0{,}8$ *см*; 2) ≈ 4 *м*; 3) $\approx 2{,}3$ *дм*. **26.** $\approx 346{,}2$ *м*². **27.** $\approx 78{,}5$ *см*². **28.** ≈ 4 *см*. **29.** $\approx 0{,}2826$ *м*². **30.** $\approx 2{,}6$ *Т*. **31.** 1) $\approx 5{,}1$ *см*²; 2) ≈ 15 *см*. **32.** 2) 10 *см*. **33.** $\frac{\pi F}{2}$. **34.** $\approx 15{,}7$ *м*². **35.** 1) 1 : 4; 2) 1 : 2; 3) 3 : 4. **36.** $\approx 0{,}2\ \frac{кГ}{см^2}$. **37.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **39.** 1) $\frac{3}{16}\pi r^2$; 2) $\frac{7}{160}\pi r^2$. **40.** 1) $\sqrt{\frac{5q}{\pi}}$; 2) $\sqrt{\frac{600q}{\pi}}$. **41.** $360^\circ \cdot \frac{q}{\pi r^2}$. **42.** 1) $\frac{R^2}{4}(\pi - 2) \approx 0{,}275R^2$; 2) $\frac{R^2}{12}(2\pi -$ $- 3\sqrt{3}) \approx 0{,}09R^2$; 3) $\frac{R^2}{8}(\pi - 2\sqrt{2}) \approx 0{,}04R^2$; 4) $\frac{R^2}{12}(\pi - 3) \approx 0{,}01R^2$. **43.** 1) $\frac{a^2}{36}(4\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0{,}20a^2$; 2) $\frac{a^2}{8}(\pi - 2) \approx 0{,}14a^2$; 3) $\frac{a^2}{12}(2\pi -$ $- 3\sqrt{3}) \approx 0{,}09a^2$. **44.** $\approx 3{,}7$ *м*². **45.** 1) $\frac{1}{6}\pi r^2 \approx 0{,}5r^2$; 2) $\frac{Qn}{360}$. **46.** $\frac{\pi R^2}{6}$. **47.** $\frac{a^2}{24}(7\pi - 6 - 6\sqrt{3}) \approx 0{,}23a^2$ или $\frac{a^2}{24}(13\pi + 6 - 6\sqrt{3}) \approx 1{,}52a^2$. **48.** $\frac{4Qmn}{\pi(m^2+n^2)}$. **49.** $\frac{R}{2}(\sqrt{4+\pi} + \sqrt{4-\pi}) \approx 1{,}8R$ и $\frac{R}{2}(\sqrt{4+\pi} -$ $- \sqrt{4-\pi}) \approx 0{,}87R$. **50.** $\frac{8Q}{\pi} \approx 2{,}55Q$. **51.** $\frac{\pi Q\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}82Q$. **52.** 1 : 2. **53.** 1) $\frac{R^2}{4}(4 - \pi) \approx 0{,}215R^2$; 2) $\frac{R^2}{3}(3\sqrt{3} - \pi) \approx 0{,}68R^2$; 3) $\frac{R^2}{6}(2\sqrt{3} -$ $- \pi) \approx 0{,}05R^2$. **54.** $\frac{a^2}{24}(\pi + 6) \approx 0{,}38a^2$. **55.** 1) В 9 раз, в 25 раз; 2) в 2 раза, в $\sqrt{5} \approx 2{,}236$ раза. **56.** Нет, надо 4 такие малые трубы. **57.** a^2. **58.** 1) $\approx 0{,}215r^2$; 2) $ab - 0{,}215b^2$; 3) $\approx 0{,}393R^2$; 4) $\approx 0{,}858r^2$. **59.** $\frac{R^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3}) \approx 1{,}23R^2$. **60.** $\frac{a^2}{2}(\pi - 2) \approx 0{,}57a^2$. **61.** $\frac{\pi}{8}(a^2+b^2) -$ $- \frac{ab}{2}$. **63.** $\frac{a^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0{,}18a^2$. **64.** $\frac{a^2}{6}(2\pi + 3\sqrt{3}) \approx 1{,}9a^2$. **67.** ≈ 988 *см*². **68.** ≈ 25 *см*². **69.** $(1{,}57R + 2a)t - 1{,}215t^2$. **70.** 625π *м*². **71.** 1) $\frac{R}{3}$; 2) $R(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}4R$; 3) $R(2\sqrt{3} - 3) \approx 0{,}46R$.

§ 9(16).

1. 2) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{10}$. 3. № 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12, 13 — первого измерения; 4, 7, 14, 16, 18 — второго измерения; 5, 6, 15, 17 — третьего измерения; 8 — нулевого измерения. 4. № 2, 4, 5, 6. 6. *Указание.* 8) Построить сначала $y=\frac{pq}{s}$, а затем уже $x=\frac{yr}{t}$. 7. *Указания.* 2) $x=\sqrt{yb}$, где $y=\frac{a^2}{c}$; 5) $x=$ $=\sqrt{b^2+y^2}$, где $y=c\sqrt{3}$; 6) $x=\sqrt{a^2\cdot\frac{a+c}{b+d}}=\sqrt{yz}$, где $y=\frac{a^2}{b+d}$, $z=a+c$. 8. Сторона квадрата $x=\sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}$. 9. Радиус искомого круга $x=R\sqrt{2}$. 10. Радиус концентрической окружности $x=\frac{R\sqrt{2}}{2}$. 11. Сторона квадрата $x=\sqrt{\frac{3}{5}ah}$. 12. Искомый радиус $x=\sqrt{R^2-r^2}$. 13. Высота искомого треугольника равна $\frac{hb}{a}$. 15. 1) Преобразовать уравнение к виду: $x(p-x)=q^2$ и составить из него пропорцию; 3) мнимые корни. 16. Бóльшая часть $x=\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$; меньшая часть $a-x=\frac{a(3-\sqrt{5})}{2}$. 17. $a_{10}=R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 18. Бóльшая часть равна $a\cdot\frac{2,236-1}{2}=0,618a$, а это отличается от $\frac{5}{8}a$ приблизительно на $0,007a$. 19. 1) $\frac{b}{2}(\sqrt{5}+1)$. 20. $2r\sqrt{\sqrt{5}-2}\approx 0,98r$. 23. Искомое расстояние точки от центра $x=r\sqrt{5}$. 24. Одна из вершин квадрата, находящихся на диаметре, удалена от центра на расстоянии $x=\frac{r\sqrt{5}}{5}$. 25. Сторона прямоугольника, перпендикулярная к основанию треугольника, $x=\frac{h(p-a)}{h-a}$. 26. Расстояние искомой параллели от вершины треугольника $x=\frac{h\sqrt{2}}{2}$. 27. Расстояние искомого перпендикуляра от вершины меньшего угла при основании треугольника $x=\sqrt{\frac{bm}{2}}$, где b—основание треугольника, m—проекция большей боковой стороны на основание. 28. Стороны прямоугольника $x=\frac{d_1(3\pm\sqrt{3})}{6}$ и $y=\frac{d_2(3\mp\sqrt{3})}{6}$, где d_1 и d_2 — диагонали ромба. 29. Расстояние вершины треугольника от вершины квадрата $x=a(2-\sqrt{3})$, где a — сторона квадрата.

30. Расстояние между вершинами данного и искомого квадратов $x = \frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$. 31. Радиус искомой окружности $x = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{2(a \pm r)}$, где a — длина перпендикуляра, проведённого из центра данной окружности на данную прямую, b — расстояние этого перпендикуляра от данной точки. 32. Стороны искомого прямоугольника равны $\frac{(a + b) \pm \sqrt{(a + b)^2 - 4cd}}{2}$, где a и b—стороны первого прямоугольника, c и d — стороны второго прямоугольника. 33. Сторона прямоугольника, параллельная высоте треугольника, $y = \frac{bhn}{bn + mh} = \frac{bh}{b + \frac{m}{n}h}$, где b — основание, h — высота треугольника. 34. $BE = \frac{a^2}{b}$. 35. $BE = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}$. 36. Искомый радиус $r = \frac{a + b - \sqrt{2ab}}{2}$, где a и b — стороны прямоугольника. 37. $x = \frac{1}{2}[\sqrt{m^2 + 4b(a + b)} - m]$. *Указание.* Продолжить отрезок $AB = a$ до пересечения с данной прямой в точке C и обозначить расстояние от точки C до ближайшей из данных точек буквой b. Воспользоваться свойством секущих, проведённых из одной точки.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

А. П. Киселёв, ГЕОМЕТРИЯ.

Глава I (III).

Подобные фигуры.

Глава II (IV).

Правильные многоугольники и вычисление длины окружности.

Глава III (V).

Измерение площадей.

Н. Рыбкин, СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ.

Обложка художника *А. Т. Домнича*

Геометрия. Учебник и сборник задач для 8 и 9 классов.

Редактор *В. Н. Кириченко*
Корректор *М. С. Кириллова*
Художеств. редактор *Г. И. Грибова*
Технич. редактор *Л. И. Клименко*

Подписано к печати с матриц 6/X 1965 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. Физ. печ. лист. 6,125, условн. печ. лист. 10,29, уч.-изд. 9,25. Тираж 75.000 (1-й завод). Издательство «Радянська школа» Государственного комитета Совета Министров Украинской ССР по печати, Киев, ул. Юрия Коцюбинского, 5. Изд. № 17645. Цена 20 коп.

Зак. № 5-553. Книжная фабрика им. Фрунзе Государственного комитета Совета Министров УССР по печати. Харьков, Донец-Захаржевская, 6/8.

Школьные учебники СССР